HAL
archives-ouvertes.fr

Inversion d'opérateurs de courbures au voisinage de la métrique euclidienne

Erwann Delay

▶ To cite this version:

Erwann Delay. Inversion d'opérateurs de courbures au voisinage de la métrique euclidienne. 2014. <hal-00973138>

HAL Id: hal-00973138
https://hal-univ-avignon.archives-ouvertes.fr/hal-00973138

Submitted on 4 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INVERSION D'OPÉRATEURS DE COURBURES AU VOISINAGE DE LA MÉTRIQUE EUCLIDIENNE

ERWANN DELAY

Résumé. Nous montrons que certains opérateurs affines en la courbure de Ricci sont localement inversibles, dans des espaces de Sobolev à poids, au voisinage de la métrique euclidienne.

Mots clefs : Courbure de Ricci, 2-tenseurs symétriques, EDP elliptique quasi-linéaire, espaces de Sobolev à poids.

2010 MSC : 53C21, 53A45, 58J05, 58J37, 35J62.

Table des matières

1. Introduction

Sur une variété Riemannienne (M, g), considérons $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et $R(g)$ sa courbure scalaire. Parmi les (champs de) 2-tenseurs symétriques géométriques naturels que l'on peut construire, les plus simples sont ceux qui seront "affines" en la courbure de Ricci, autrement dit, de la forme

$$\mathrm{Ein}(g) := \mathrm{Ric}(g) + \kappa R(g)g + \Lambda g,$$

où κ et Λ sont des constantes. Ainsi, si $\kappa = \Lambda = 0$ on retrouve la courbure de Ricci, si $\kappa = -\frac{1}{2}$ le tenseur d'Einstein (avec constante cosmologique Λ), enfin si $\kappa = -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda = 0$ le tenseur de Schouten.

Date: 03 avril 2014.

Rappelons que ce tenseur est géométriquement naturel dans le sens où pour tout difféomorphisme φ assez régulier,

$$\varphi^* \operatorname{Ein}(g) = \operatorname{Ein}(\varphi^* g).$$

Nous nous posons ici le problème de l'inversion de l'opérateur Ein. On se donne donc E un champ de tenseur symétrique sur M, on cherche g métrique riemannienne telle

$$\operatorname{Ein}(g) = E. \tag{1.1}$$

On doit ainsi résoudre un système quasi-linéaire particulièrement complexe. Le cas de la courbure de Ricci prescrite remonte aux années 80. DeTurck [12], en 1981, a tout d'abord montré un résultat d'existence locale au voisinage d'un point p (il a depuis entrepris une longue étude systématique pour le cadre local, comme le montrent ses travaux en 1999 [13]).

Puis il y a eu des résultats *globaux* : [14] sur le cas très particulier de la dimension 2, pour les surfaces *compactes*. Hamilton [17], a traité le cas de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $n > 2$) en prouvant un résultat d'inversion locale au voisinage de la métrique standard. Nous avions ensuite prouvé un résultat analogue sur l'espace hyperbolique réel [8], et complexe [11], au voisinage de la métrique canonique.

Ce type d'inversion locale de l'opérateur de Ricci a été aussi adapté à certaines variétés d'Einstein [15], [9], [7].

Notons qu'il existe aussi des résultats d'obstruction sur l'inversion de la courbure de Ricci [16], [2], [17], [6], [8].

Le but de cet article est de prouver un résultat d'existence locale sur $\mathbb{R}^n$ près de la métrique euclidienne δ. Nous travaillons pour cela dans des espaces de Sobolev à poids $H^{s,t}$ de fonctions (ou champs de tenseurs) u telles que $\langle x\rangle^t u$ est dans l'espace de Sobolev classique H^s (voir section 3 pour une définition plus précise).

Théorème 1.1. *Soient $s, t, \kappa, \Lambda \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{n}{2}$, $t \geq 0$, $\kappa > -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda > 0$. Alors pour tout $e \in H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ proche de zéro, il existe h proche de zéro dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ telle que*

$$\operatorname{Ein}(\delta + h) = \operatorname{Ein}(\delta) + e.$$

De plus l'application $e \mapsto h$ est lisse au voisinage de zéro entre les espaces de Hilbert correspondants.

Ce résultat permet de traiter un problème similaire à la tentative avortée de [18] pour prescrire la courbure de Ricci, essentiellement grâce à l'ajout d'une constante cosmologique Λ dans l'équation, nous y revenons en section 6.

Pour un opérateur d'ordre deux, il peut être surprenant de voir que la régularité de notre solution n'a pas deux points de plus que la donnée. On peut se convaincre que la régularité est optimale en transposant l'équation par un difféomorphisme peu régulier.

Cette inversion nous permet ensuite, en section 5 de prouver que l'image de certains opérateurs de type Riemann-Christoffel sont des sous variétés dans des espaces de Fréchet à poids.

Remerciements. Je remercie Philippe Delanoë de m'avoir signalé en 1994 l'erreur malheureuse de [18] qui a fini par motiver ce travail quelques années après... Ce projet est en partie financé par les ANR SIMI-1-003-01 et ANR-10-BLAN 0105 .

2. Définitions, notations et conventions

Pour une métrique riemannienne g, nous noterons ∇ sa connexion de Levi-Civita , par $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et par $\mathrm{Riem}(g)$ sa courbure de Riemann sectionnelle.

Soit $\mathcal{T}_p^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang p et contravariants de rang q. Lorsque $p = 2$ et $q = 0$, on notera $\mathcal{S}_2$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques, qui se décompose en $\mathcal{G} \oplus \mathring{\mathcal{S}}_2$ où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des tenseurs δ-conformes et $\mathring{\mathcal{S}}_2$ l'ensemble des tenseurs sans trace (relativement à δ). On utilisera la convention de sommation d'Einstein (les indices correspondants vont de 1 à n), et nous utiliserons g_{ij} et son inverse g^{ij} pour monter ou descendre les indices.

Le Laplacien (brut) est défini par

$$\triangle = -tr\nabla^2 = \nabla^*\nabla,$$

où ∇^* est l'adjoint formel L^2 de ∇. Pour u un 2-tenseur covariant symétrique, on définit sa divergence par

$$(\mathrm{div} u)_i = -\nabla^j u_{ji}.$$

Pour une 1-forme ω on M, on définit sa divergence par :

$$d^*\omega = -\nabla^i \omega_i,$$

et la partie symétrique de ses dérivées covariantes :

$$(\mathcal{L}\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i\omega_j + \nabla_j\omega_i),$$

(notons que $\mathcal{L}^* = \mathrm{div}$).

On définit l'opérateur de Bianchi des 2-tenseurs symétriques dans les 1-formes :

$$B_g(h) = \mathrm{div}_g\, h + \frac{1}{2}d(\mathrm{Tr}_g\, h).$$

3. Espaces à poids et isomorphismes

Les espaces à poids que nous utiliserons ici ne sont pas les espaces classiques utilisés dans le contexte asymptotiquement euclidien de la relativité générale (voir [3] ou [5] par exemple). Ils sont plutôt utilisés en théorie du scattering comme dans les travaux de S. Agmon [1] ou de R. Melrose [19] (voir aussi son cours [20] section 6, ou [21] p241). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on rappelle l'espace de Sobolev classique

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ ,\ \ \langle \xi \rangle^s \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

où $S'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de l'espace de Schwartz, et $\widehat{u}$ la transformée de Fourier de u. On munit $H^s(\mathbb{R}^n)$ de la norme

$$\|u\|_s := \|\langle \xi \rangle^s \widehat{u}\|_{L^2}.$$

Afin de décrire plus précisément le comportement asymptotique des (champs de) tenseurs qui nous intéressent, introduisons les espaces à poids (voir [1] ou [20] par exemple)

$$H^{s,t}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ ,\ \ \langle x \rangle^t u \in H^s(\mathbb{R}^n)\} = \langle x \rangle^{-t} H^s(\mathbb{R}^n).$$

munis de la norme

$$\|u\|_{s,t} := \|\langle x \rangle^t u\|_s.$$

Ces espaces ont beaucoup de bonnes propriétés comme : $\forall s,t \in \mathbb{R}$, les applications suivantes sont continues

$$\forall s' \leq s,\ \ \forall t' \leq t \quad H^{s,t}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s',t'}(\mathbb{R}^n),$$

$$\partial_{x_j} : H^{s,t}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-1,t}(\mathbb{R}^n),$$

$$\times x_j : H^{s,t}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s,t-1}(\mathbb{R}^n).$$

La transformée de Fourier donne un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} H^{s,t}(\mathbb{R}^n) & \widetilde{\longrightarrow} & H^{t,s}(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto & \widehat{u}. \end{array}$$

Le dual de $H^{s,t}(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à $H^{-s,-t}(\mathbb{R}^n)$. L'injection de Sobolev classique nous donne aussi immédiatement pour $k \in \mathbb{N}$

$$s > \frac{n}{2} + k \ \Rightarrow \ \ H^{s,t}(\mathbb{R}^n) \subset \langle x \rangle^{-t} C^k_{\rightarrow 0}(\mathbb{R}^n),$$

où $C^k_{\rightarrow 0}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions C^k sur $\mathbb{R}^n$ dont les dérivées d'ordre $\leq k$ tendent vers zéro à l'infini.

Proposition 3.1. *Pour $s,t \in \mathbb{R}$ et $C > 0$ une constante, l'opérateur*

$$\Delta + C : H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n) \widetilde{\longrightarrow} H^{s,t}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par transformée de Fourier, il suffit de remarquer que

$$\times(|\xi|^2 + C) : H^{t,s+2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t,s}(\mathbb{R}^n)$$

est un isomorphisme. □

Nous aurons aussi besoin du

Lemme 3.2. *Soient $s > \frac{n}{2}$ et $t \geq 0$ alors*

$$u, v \in H^{s,t} \Rightarrow uv \in H^{s,t}.$$

De plus il existe une constante $C_{s,t}$ telle que

$$\|uv\|_{s,t} \leq C_{s,t}\|u\|_{s,t}\|v\|_{s,t}.$$

Démonstration. Le résultat est connu dans le cas $t = 0$ pour une constante C_s. On a ainsi

$$\|\langle x\rangle^{2t} uv\|_s \leq C_s\|\langle x\rangle^t u\|_s\|\langle x\rangle^t v\|_s.$$

Ce qui se traduit par

$$\|uv\|_{s,2t} \leq C_s\|u\|_{s,t}\|v\|_{s,t}.$$

Il suffit ensuite de rappeler que si $t \geq 0$, on a une inclusion continue $H^{s,2t} \subset H^{s,t}$. □

Remarque 3.3. Les espaces à poids que nous utilisons ici sont, en un certain sens, plus gros que ceux utilisés habituellement dans le contexte asymptotiquement euclidien de la relativité générale comme dans [5] ou [3]. En effet nous ne demandons pas ici aux dérivées de décroître plus vite (ou croître moins vite) que la fonction à l'infini.

4. Preuve du théorème principal

Il est maintenant bien connu que l'équation que nous voulons résoudre (1.1) n'est pas elliptique dû à l'invariance de la courbure par difféomorphisme. Nous allons modifier cette équation en s'inspirant de la méthode de DeTurck. On y ajoute donc un terme jauge de telle sorte que le cette nouvelle équation devienne elliptique, tout en faisant en sorte que ses solutions soient encore solutions de l'équation de départ.

Tout d'abord comme

$$\operatorname{Tr}_g \operatorname{Ein}(g) = (1 + n\kappa)R(g) + n\Lambda,$$

l'équation (1.1) est équivalente à

$$\operatorname{Ric}(g) = E - \frac{\kappa \operatorname{Tr}_g E + \Lambda}{1 + n\kappa} g.$$

Pour toute métrique g, $B_g(\operatorname{Ric}(g)) = 0$ par l'identité de Bianchi. Nous définissons donc

$$\mathcal{B}_g(E) = \operatorname{div}_g E + \frac{2\kappa + 1}{2(1 + \kappa n)} d \operatorname{Tr}_g E = B_g(E) - \frac{(n-2)\kappa}{2(1 + \kappa n)} d \operatorname{Tr}_g E,$$

de sorte que l'identité de Bianchi se traduise ici par

$$\mathcal{B}_g(Ein(g)) = 0.$$

Afin de construire notre nouvelle équation, rappelons quelques différentielles d'opérateurs. On a d'une part (voir [4] par exemple)

$$D\operatorname{Ric}(\delta)h = \frac{1}{2}\Delta h - \mathcal{L}_\delta B_\delta(h).$$

D'autre part, compte tenu de la différentielle de $B_g(E)$ relativement à la métrique (voir [9] par exemple), on trouve

$$D[\mathcal{B}_{(.)}(E)](\delta)h = -EB_\delta(h) + \frac{(n-2)\kappa}{2(1+\kappa n)}d\langle E, h\rangle + T(E,h),$$

où E est identifié à l'endomorphisme de T^*M correspondant et

$$T(E,h)_j = \frac{1}{2}(\partial_k E_{jl} + \partial_l E_{kj} - \partial_j E_{kl})h^{kl},$$

en particulier $T(E,h) = 0$ si E est proportionnel à δ. On définit, pour l'instant formellement, pour $\kappa \neq -1/n$, $\Lambda \neq 0$, h et e voisins de zéro dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$:

$$\mathcal{F}(h,e) := \mathrm{Ric}(\delta+h) - E + \frac{\kappa \operatorname{Tr}_{\delta+h} E + \Lambda}{1+\kappa n}(\delta+h) - \frac{1}{\Lambda}\mathcal{L}_\delta \mathcal{B}_{\delta+h}(E),$$

où $E = \mathrm{Ein}(\delta) + e = \Lambda\delta + e$.

Proposition 4.1. *Pour $\kappa \neq -1/n$, $\Lambda \neq 0$, $s > \frac{n}{2}$ et $t \geq 0$ l'application*

$$\mathcal{F} : H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2) \times H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2) \longrightarrow H^{s,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2),$$

est bien définie et lisse au voisinage de zéro.

Démonstration. La preuve de cette proposition est renvoyée en appendice, elle utilise essentiellement le fait que sous ces hypothèses, l'espace $H^{s,t}$ est une algèbre. □

Proposition 4.2. *Soient $s > \frac{n}{2}$, $t \geq 0$, $\Lambda > 0$ et $k > -\frac{1}{2(n-1)}$. Pour tout e assez petit dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$, il existe h dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ tel que $\mathcal{F}(h,e) = 0$, de plus l'application $e \mapsto h$ est lisse entre les espaces de Hilbert correspondants.*

Démonstration. On a déjà

$$\mathcal{F}(0,0) = 0,$$

et la différentielle de $\mathcal{F}$ relativement à la première variable est

$$D_h\mathcal{F}(0,0)h = \frac{1}{2}\Delta h + \Lambda h - \frac{\kappa\Lambda}{1+\kappa n}\operatorname{Tr}_\delta h\, \delta - \frac{(n-2)\kappa}{2(1+\kappa n)}\partial\partial \operatorname{Tr}_\delta h.$$

On remarque que lorsque $\kappa \neq 0$, $D_h\mathcal{F}(0,0)$ ne préserve pas le scindage $\mathcal{G} \oplus \mathring{S}_2$. En effet dans la direction conforme $h = u\delta$ on trouve

$$D_h\mathcal{F}(0,0)(u\delta) = \frac{1}{2(1+\kappa n)}[(1+2(n-1)\kappa)\Delta u + 2\Lambda u]\delta - \frac{(n-2)n\kappa}{2(1+\kappa n)}\mathring{\mathrm{Hess}}\, u,$$

où $\mathring{\mathrm{Hess}}\, u$ est la partie sans trace de la hessienne de u. En revanche, dans la direction $h = \mathring{h}$ sans trace, on a

$$D_h\mathcal{F}(0,0)\mathring{h} = \frac{1}{2}(\Delta + 2\Lambda)\mathring{h}.$$

Quoiqu'il en soit, compte tenu de la proposition 3.1, si $\Lambda > 0$ et $\kappa > -\frac{1}{2(n-1)}$, l'opérateur $D_h\mathcal{F}(0,0)$ est un isomorphisme de $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$

dans $H^{s,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$. Le théorème des fonctions implicite permet alors de conclure. $\square$

Remarque 4.3. On voit apparaître naturellement la constante critique $\kappa = -1/2(n-1)$ correspondant au tenseur de Schouten dans la direction conforme.

Proposition 4.4. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2, quitte à réduire les voisinages de zéro, h est solution de*

$$\mathrm{Ein}(\delta + h) = E.$$

Démonstration. On applique $B_{\delta+h}$ à l'équation $\mathcal{F}(h, e) = 0$, ainsi

$$B_{\delta+h}\mathcal{F}(h, e) = -\mathcal{B}_{\delta+h}(E) - \frac{1}{\Lambda} B_{\delta+h}\mathcal{L}_\delta \mathcal{B}_{\delta+h}(E) = 0.$$

On pose $\omega = \frac{1}{\Lambda}\mathcal{B}_{\delta+h}(E)$ alors

$$P_{\delta+h}\omega := B_{\delta+h}\mathcal{L}_\delta \omega + \Lambda\omega = 0,$$

avec, comme il est justifié en appendice, $\omega \in H^{s+1,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1)$. Or par la proposition 3.1, comme

$$P_\delta = \frac{1}{2}(\Delta + 2\Lambda)$$

est un isomorphisme de $H^{s+1,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1)$ dans $H^{s-1,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1)$, l'opérateur $P_{\delta+h}$ reste injectif dans le même espace si h est assez petit dans $H^{s+2,t} \subset H^{s,0}$. On obtient finalement

$$\omega = 0$$

$\square$

5. Image d'opérateurs de courbures de type Riemann-Christoffel

Nous voudrions, tout comme dans [8], montrer que l'image de certain opérateurs de type Riemann-Christoffel, sont des sous variétés dans C^∞, au voisinage de la métrique euclidienne δ. Nous cherchons donc tout d'abord un tenseur $\mathcal{E}in$ qui soit 4 fois covariant, ayant les mêmes propriétés algébriques que le tenseur de Riemann et affine en la courbure, on pose donc

$$\mathcal{E}in(g) = \mathrm{Riem}(g) + g \owedge (a\,\mathrm{Ric}(g) + bR(g)g + cg),$$

où $\owedge$ est le produit de Kulkarni-Nomizu ([4] p. 47). Comme nous voulons que $\mathrm{Tr}_g\,\mathcal{E}in(g)$ soit proportionnelle à $\mathrm{Ein}(g)$, cela nous impose

$$c = \frac{1 + (n-2)a}{2(n-1)}\Lambda, \quad b = \frac{\kappa[1 + a(n-2)] - a}{2(n-1)}.$$

On a alors

$$\mathrm{Tr}_g\,\mathcal{E}in(g) = [a(n-2) + 1]\,\mathrm{Ein}(g).$$

Nous définirons la version de type Riemann-Christoffel de $\mathcal{E}in(g)$ par

$$[g^{-1}\mathcal{E}in(g)]^i_{klm} := g^{ij}\mathcal{E}in(g)_{jklm}.$$

Considérons $\mathcal{R}^1_3$, le sous-espace de $\mathcal{T}^1_3$ des tenseurs vérifiants

$$\tau^i_{ilm} = 0,\ \tau^i_{klm} = -\tau^i_{kml},\ \tau^i_{klm} + \tau^i_{mkl} + \tau^i_{lmk} = 0.$$

On définit l'espace de Fréchet

$$C^{\infty,t} = \cap_{k\in\mathbb{N}} H^{k,t},$$

munit de la famille de semi-normes $\{\|.\|_{k,t}\}_{k\in\mathbb{N}}$. On procède alors de façons similaire à [8] pour prouver que

Théorème 5.1. *Sous les conditions du théorème 1.1, l'image de l'application*

$$\begin{array}{lcl} C^{\infty,t}(\mathbb{R}^n,\mathcal{S}_2) & \longrightarrow & C^{\infty,t}(\mathbb{R}^n,\mathcal{R}^1_3) \\ h & \mapsto & (\delta+h)^{-1}\mathcal{E}in(\delta+h) - (\delta)^{-1}\mathcal{E}in(\delta) \end{array}$$

est une sous-variété lisse au voisinage de zéro.

Remarque 5.2. Dans la définition de $\mathcal{E}in$, le choix de $a \neq -1/2(n-1)$ est encore libre. Si nous voulions retrouver la courbure de Riemann lorsque $\kappa = \Lambda = 0$ et, lorsque $\kappa = -1/2$, un tenseur à divergence nulle (donc $a = -1$ et $b = 1/4$ via l'identité de Bianchi 2), on pourrait choisir par exemple

$$a = 2\kappa\ , \quad b = \frac{\kappa[2\kappa(n-2)-1]}{2(n-1)}\ , \quad c = \frac{\Lambda[2\kappa(n-2)+1]}{2(n-1)}.$$

Il n'est pas clair que ce choix soit plus naturel qu'un autre, peut être qu'une identité de type Bianchi 2 qui en découlerait serait aussi plus légitime mais nous n'avons pas pu trancher à ce stade.

6. Commentaires et perspectives

Comme signalé en introduction le résultat pour le cas $\kappa = \Lambda = 0$ est annoncé dans [18] mais la démonstration comporte une erreur dans la preuve de la proposition page 363 signalée par Philippe Delanoë. En effet, avec les notations de cette note au C.R.A.S., même si L_R est surjective dans les bon espaces à poids , $R.L_R$ n'est plus surjective dans ces même espaces ainsi $f'(e)$ ne l'est pas non plus. Ce problème est dû au comportement asymptotique de R qui, même en supposant R inversible, tend vers zéro à l'infini, en particulier R n'est pas inversible à l'infini. Même si nous n'avons pas cherché de contre-exemple au théorème principal de [18], le résultat annoncé semble ainsi peu probable.

Le travail présenté ici remédie d'une certaine manière à ce problème par l'ajout d'une constante cosmologique $\Lambda > 0$, ainsi en particulier, à l'infini, $E = \Lambda\delta$ est encore inversible.

Il serait intéressant d'étudier un résultat analogue sur une variété asymptotiquement euclidienne en un sens approprié. Notons ici que la définition naturelle n'est pas celle utilisée habituellement dans ce type de contexte (voir remarque 3.3) et probablement que la définition adaptée est celle de [19]. Nous approfondirons cette direction dans un futur proche.

L'inversion de ce type d'opérateur doit pouvoir aussi être réalisée au voisinage d'autres modèles non compactes à courbure de Ricci parallèle comme $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Il faudra alors s'inspirer de [10]. Ce sera aussi l'objet de futurs travaux.

7. Appendice

Nous justifions ici la proposition 4.1 par une preuve relativement formelle. Nous renvoyons le lecteur encore sceptique à [8] où une preuve similaire est particulièrement détaillée.

Rappelons que la courbure de Ricci s'exprime en coordonnées locales par

$$\mathrm{Ric}(g)_{jk} = \partial_l \Gamma^l_{jk} - \partial_k \Gamma^l_{jl} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{pl} - \Gamma^p_{jl}\Gamma^l_{pk},$$

où

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}).$$

Nous écrirons donc abusivement

$$\mathrm{Ric}(g) = \partial\Gamma + \Gamma\Gamma \ , \quad \Gamma = g^{-1}\partial g.$$

Ici nous avons $g = \delta + h$ avec h petit dans $H^{s+2,t}$, $s > \frac{n}{2}$, $t \geq 0$. On a alors

$$g^{-1} = \delta^{-1} + \widetilde{h} \ , \ \ \widetilde{h} \in H^{s+2,t},$$

avec par inégalité triangulaire et par le lemme 3.2

$$\|\widetilde{h}\|_{s+2,t} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} C^k_{s+2,t}\|h\|^{k+1}_{s+2,t} = \frac{\|h\|_{s+2,t}}{1 - C_{s+2,t}\|h\|_{s+2,t}}.$$

Pour $\|h\|_{s+2,t} \leq \frac{1}{2C_{s+2,t}}$, ce qu'on suppose désormais, on a

$$\|\widetilde{h}\|_{s+2,t} \leq 2\|h\|_{s+2,t}.$$

On obtient alors, en utilisant encore le lemme 3.2, et en omettant dorénavant les constantes

$$\Gamma = (\delta^{-1} + \widetilde{h})\partial h \in H^{s+1,t} \ , \ \ \|\Gamma\|_{s+1,t} \leq \|h\|_{s+2,t},$$

et

$$\partial\Gamma \in H^{s,t} \ , \ \ \|\partial\Gamma\|_{s,t} \leq \|\Gamma\|_{s+1,t} \leq \|h\|_{s+2,t},$$

d'où, toujours par le lemme 3.2,

$$\mathrm{Ric}(g) \in H^{s,t} \ , \ \ \|\mathrm{Ric}(g)\|_{s,t} \leq \|h\|_{s+2,t}.$$

Étudions maintenant l'opérateur de Bianchi

$$\mathcal{B}_g(E) = \operatorname{div}_g E + \frac{2\kappa+1}{2(1+\kappa n)} d\operatorname{Tr}_g E,$$

que nous écrirons encore abusivement

$$\mathcal{B}_g(E) = g^{-1}(\partial E + \Gamma E) + \partial(g^{-1}E).$$

Compte tenu des calculs précédent et du fait que $E = \Lambda\delta + e$, on a

$$\mathcal{B}_g(E) = (\delta^{-1} + \widetilde{h})[\partial e + \Gamma(\Lambda\delta + e)] + \partial[\delta^{-1}e + \widetilde{h}(\Lambda\delta + e)].$$

On estime alors comme précédemment

$$\mathcal{B}_g(E) \in H^{s+1,t}\ ,\quad \|\mathcal{B}_g(E)\|_{s+1,t} \le (\|h\|_{s+2,t} + \|e\|_{s+2,t}),$$

et

$$\mathcal{L}_\delta\mathcal{B}_g(E) \in H^{s,t}\ ,\quad \|\mathcal{L}_\delta\mathcal{B}_g(E)\|_{s,t} \le \|\mathcal{B}_g(E)\|_{s+1,t} \le (\|h\|_{s+2,t} + \|e\|_{s+2,t}).$$

Il reste a estimer le terme d'ordre zéro :

$$Z := \frac{\kappa\operatorname{Tr}_{\delta+h} E + \Lambda}{1+\kappa n}(\delta + h) - E$$

On écrit encore formellement, en se souvenant ici que le premier "produit" est une trace,

$$\begin{aligned}(1+n\kappa)Z &= [\kappa(\delta^{-1} + \widetilde{h})(\Lambda\delta + e) + \Lambda](\delta + h) - (1+n\kappa)(\Lambda\delta + e)\\ &= [\kappa\delta^{-1}e + \kappa\widetilde{h}(\Lambda\delta + e) + (1+n\kappa)\Lambda](\delta + h) - (1+n\kappa)(\Lambda\delta + e).\end{aligned}$$

En développant, on remarque que le terme constant est nul et que l'on peut estimer comme auparavant, pour $k \neq -1/n$,

$$Z \in H^{s,t}\ ,\quad \|Z\|_{s,t} \le \|Z\|_{s+2,t} \le (\|h\|_{s+2,t} + \|e\|_{s+2,t}).$$

Références

1. Shmuel Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), no. 2, 151–218.
2. Alfred Baldes, *Nonexistence of Riemannian metrics with prescribed Ricci tensor*, Nonlinear problems in geometry (Mobile, Ala., 1985), Contemp. Math., vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 1–8. MR 848927 (87k :53085)
3. R. Bartnik, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. 5, 661–693.
4. A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 10, Springer Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1987.
5. Y. Choquet-Bruhat and D. Christodoulou, *Elliptic systems in $H_{s,\delta}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity*, Acta Math. **146** (1981), no. 1-2, 129–150.
6. Ph. Delanoë, *Obstruction to prescribed positive Ricci curvature*, Pacific J. Math. **148** (1991), no. 1, 11–15.

7. ______, *Local solvability of elliptic, and curvature, equations on compact manifolds*, J. Reine Angew. Math. **558** (2003), 23–45. MR 1979181 (2004e :53054)
8. E. Delay, *Etude locale d'opérateurs de courbure sur l'espace hyperbolique*, J. Math. Pures Appli. **78** (1999), 389–430.
9. ______, *Study of some curvature operators in the neighbourhood of an asymptotically hyperbolic Einstein manifold*, Advances in Math. **168** (2002), 213–224.
10. ______, *Sur l'inversion de l'opérateur de Ricci au voisinage d'une métrique Ricci parallèle*, (En préparation).
11. E. Delay and M. Herzlich, *Ricci curvature in the neighbourhood of rank-one symmetric spaces*, J. Geometric Analysis **11** (2001), no. 4, 573–588.
12. D. DeTurck, *Existence of metrics with prescribed ricci curvature : Local theory*, Invent. Math. **65** (1981), 179–207.
13. Dennis DeTurck and Hubert Goldschmidt, *Metrics with prescribed Ricci curvature of constant rank. I. The integrable case*, Adv. Math. **145** (1999), no. 1, 1–97.
14. Dennis M. DeTurck, *Metrics with prescribed Ricci curvature*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, pp. 525–537.
15. ______, *Prescribing positive Ricci curvature on compact manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **43** (1985), no. 3, 357–369 (1986).
16. Dennis M. DeTurck and Norihito Koiso, *Uniqueness and nonexistence of metrics with prescribed Ricci curvature*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 5, 351–359.
17. Richard Hamilton, *The Ricci curvature equation*, Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 2, Springer, New York, 1984, pp. 47–72. MR 765228 (86b :53040)
18. Albert Jeune, *Solutions globales de l'équation de Ricci sur $\mathbf{R}^n$ dans les espaces de Sobolev à poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **308** (1989), no. 12, 361–364.
19. Richard B. Melrose, *Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidian spaces*, Spectral and scattering theory (Sanda, 1992), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 161, Dekker, New York, 1994, pp. 85–130.
20. ______, *Graduate Analysis Elliptic regularity and Scattering*, no. Lecture 18.156, Massachusetts Institute of Technology, Spring 2008, http ://math.mit.edu/ rbm/18.156-S08/Lecture-Notes.pdf.
21. Elmar Schrohe, *Spectral invariance, ellipticity, and the Fredholm property for pseudodifferential operators on weighted Sobolev spaces*, Ann. Global Anal. Geom. **10** (1992), no. 3, 237–254.

ERWANN DELAY, LABO. DE MATH. D'AVIGNON, FAC. DES SCIENCES, 33 RUE LOUIS PASTEUR, F-84000 AVIGNON, FRANCE

E-mail address: `Erwann.Delay@univ-avignon.fr`

URL: `http://www.univ-avignon.fr/fr/recherche/annuaire-chercheurs/membrestruc/personnel/delay-erwann-1.html`