Inversion d'opérateurs de courbure au voisinage d'une métrique Ricci parallèle

Erwann Delay

INVERSION D'OPÉRATEURS DE COURBURE AU VOISINAGE D'UNE MÉTRIQUE RICCI PARALLÈLE

ERWANN DELAY

Résumé. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord, à courbure de Ricci parallèle. Nous montrons que certains opérateurs, affines en la courbure de Ricci, sont localement inversibles, au voisinage de la métrique g.

Mots clefs : Courbure de Ricci, variété produit, métriques d'Einstein, 2-tenseurs symétriques, EDP elliptique quasi-linéaire.

2010 MSC : 53C21, 53A45, 58J05, 58J37, 35J62.

Table des matières

1. Introduction

Sur une variété Riemannienne (M, g), considérons $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et $R(g)$ sa courbure scalaire. Parmi les (champs de) 2-tenseurs symétriques géométriques naturels que l'on peut construire, les plus simples sont ceux qui seront "affines" en la courbure de Ricci, autrement dit, de la forme

$$\mathrm{Ein}(g) := \mathrm{Ric}(g) + \kappa R(g)g + \Lambda g,$$

où κ et Λ sont des constantes. Ainsi, si $\kappa = \Lambda = 0$ on retrouve la courbure de Ricci, si $\kappa = -\frac{1}{2}$ le tenseur d'Einstein (avec constante

Date: 2 mai 2016.

cosmologique Λ), enfin si $\kappa = -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda = 0$ le tenseur de Schouten. Rappelons que ce tenseur est géométriquement naturel dans le sens où pour tout difféomorphisme φ assez régulier,

$$\varphi^* \operatorname{Ein}(g) = \operatorname{Ein}(\varphi^* g).$$

Nous nous posons ici le problème de l'inversion de l'opérateur Ein. On se donne donc E un champ de tenseur symétrique sur M, on cherche g métrique riemannienne telle

$$\operatorname{Ein}(g) = E. \tag{1.1}$$

On doit ainsi résoudre un système quasi-linéaire particulièrement complexe. Le cas de la courbure de Ricci prescrite remonte aux années 80. DeTurck [9], en 1981, a tout d'abord montré un résultat d'existence locale au voisinage d'un point p dans $\mathbb{R}^n$ sous l'hypothèse (intrinsèque) que la matrice de $R(p)$ est inversible (il a depuis entrepris une longue étude systématique pour le cadre local, comme le montrent ses travaux en 1999 [10]).

Puis il y a eu des résultats *globaux* : DeTurck [11], en 1982, a traité le cas très particulier de la dimension 2, pour les surfaces *compactes*. Il obtient une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir la caractéristique d'Euler-Poincaré. Hamilton [15], en 1984, a traité le cas de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $n > 2$) en prouvant un résultat d'inversion locale au voisinage de la métrique standard. Nous avions ensuite prouvé un résultat analogue sur l'espace hyperbolique réel [5], et complexe [8], au voisinage de la métrique canonique. Parmis les résultats récents on peut aussi citer les travaux de A. Pulemotov comme [17].

Ce type d'inversion locale a été ensuite adapté à certaines variétes d'Einstein [12], [6], [4].

Notons qu'il existe aussi des résultats d'obstruction sur l'inversion de la courbure de Ricci [13], [1], [15], [3], [5].

Afin d'illustrer simplement le type de résultats obtenus ici, nous en donnerons un corollaire :

Théorème 1.1. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne lisse dont la courbure* $\operatorname{Ein}(g)$ *est non dégénérée et parallèle. On suppose que* $\kappa = 0$ *et que* -2Λ *n'est pas dans le spectre du laplacien de Hodge agissant sur les 1-formes, ni dans le spetcre du laplacien de Lichnerowicz. Soient* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *et* $\alpha \in (0, 1)$*. Alors pour tout* $e \in C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ *proche de zéro, il existe un unique* h *proche de zéro dans* $C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ *telle que*

$$\operatorname{Ein}(g + h) = \operatorname{Ein}(g) + e.$$

De plus l'application $e \mapsto h$ *est lisse au voisinage de zéro entre les espaces de Banach correspondants.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème 6.1 où κ n'est pas forcément nulle et -2Λ peut être dans spectre du laplacien de Lichnerowicz, à condition de modifier l'équation (1.1) par l'ajout d'une projection.

Nous étendons ainsi les résultats antérieurs sur les variétés compactes d'Einstein, de courbure positive, au cas de métriques Ricci parallèles, et de tout types de courbures. Noter aussi l'apparition d'une condition topologique via le laplacien de Hodge (annulation du premier nombre de Betti si $\kappa = \Lambda = 0$).

La régularité de notre solution est optimale, il suffit de transporter l'équation par un difféomorphisme peu régulier pour s'en convaincre.

Le fait que la métrique de départ soit Ricci parallèle équivaut au fait qu'elle est localement le produit de métriques d'Einstein (voir par exemple [18]).

Un exemple modèle pour cet article est le produit de deux variétés compactes d'Einstein (M_1, g_1) et (M_2, g_2), ainsi

$$M = M_1 \times M_2 \ , \quad g = g_1 \oplus g_2.$$

Le cas particulier $\kappa = \Lambda = 0$, donc de prescription de la courbure de Ricci, doit servir de fil conducteur. Dans ce cas le noyau du laplacien de Lichnerowicz Δ_L est de dimension au moins 2 puisqu'il contient $c_1\, g_1 \oplus c_2\, g_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Concernant les travaux précédents sur les variétés compactes, où la dimension du noyau de Δ_L est supposée être égal à 1, on peut remplacer la résolution qui sera donnée ici "à une constante additive près" par une résolution à "une constante multiplicative près", voir la remarque 4.4.

Après une étude plus précise de la positivité de Δ_L et de son noyau, nous donnons des exemples de variétés à courbure sectionnelle positive (au sens large) qui vérifient les hypothèses. Par souci pédagogique, nous commencons par l'inversion de l'opérateur de Ricci en section 4.

On traite aussi d'un résultat analogue pour l'opérateur de Ricci contravariant, plus adapté au cas de la courbure négative.

Enfin on étudie la prescription des autres opérateurs de courbure, dont le théorème 1.1 est en fait un cas particulier, où nous donnons un exemple en courbure nulle.

Finalement, cette dernière étude nous permet de prouver que l'image de certains opérateurs de type Riemann-Christoffel sont des sous-variétés lisses dans C^∞.

Remerciements : Ce travail est en partie financé par les ANR SIMI-1-003-01 et ANR-10-BLAN 0105.

2. Définitions, notations et conventions

Nous noterons ∇ la connexion de Levi-Civita de g, par $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et par $\mathrm{Riem}(g)$ sa courbure de Riemannian sectionelle.

Soit $\mathcal{T}_p^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang p. Lorsque $p=2$ et $q=0$, on notera $\mathcal{S}_2$ le sous ensemble des tenseurs symétriques qui se décompose et $\mathcal{G}\oplus\mathring{\mathcal{S}}_2$ où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des tenseurs g-conformes et $\mathring{\mathcal{S}}_2$ l'ensemble des tenseurs sans traces (relativement à g). On utilisera la convention de sommation d'Einstein (les indices correspondants vont de 1 à n), et nous utiliserons g_{ij} et son inverse g^{ij} pour monter ou descendre les indices.

Le Laplacian (brut) est définit par

$$\triangle = -tr\nabla^2 = \nabla^*\nabla,$$

où ∇^* est l'adjoint formel L^2 de ∇. Le Laplacian de Lichnerowicz agissant sur les (champs de) 2-tenseurs covariant symétriques est

$$\triangle_L = \triangle + 2(\mathrm{Ric} - \mathrm{Riem}), \tag{2.1}$$

où

$$(\mathrm{Ric}\ u)_{ij} = \frac{1}{2}[\mathrm{Ric}(g)_{ik}u_j^k + \mathrm{Ric}(g)_{jk}u_i^k],$$

et

$$(\mathrm{Riem}\ u)_{ij} = \mathrm{Riem}(g)_{ikjl}u^{kl}.$$

Pour u un 2-tenseur covariant symétrique, on définit sa divergence par

$$(\mathrm{div} u)_i = -\nabla^j u_{ji}.$$

Pour une 1-forme ω on M, on définit sa divergence par :

$$d^*\omega = -\nabla^i\omega_i,$$

et la partie symétrique de ses dérivées covariantes :

$$(\mathcal{L}\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i\omega_j + \nabla_j\omega_i),$$

(notons que $\mathcal{L}^* = \mathrm{div}$). Le laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les 1-formes sera noté

$$\Delta_H = dd^* + d^*d = \Delta + \mathrm{Ric}\,.$$

On définit l'opérateur de Bianchi des 2-tenseurs symétriques dans les 1-formes :

$$B_g(h) = \mathrm{div}_g\, h + \frac{1}{2}d(\mathrm{Tr}_g\, h).$$

3. Laplacien de Lichnerowicz et isomorphisme

Nous commencerons cette section par une autre écriture du Laplacien de Lichnerowicz. Elle permet entre autre de voir simplement que les tenseurs parallèles sont dans son noyau. On considère l'opérateur de $\mathcal{S}_2$ dans $\mathcal{T}_3$ définit par

$$(Du)_{kij} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\nabla_k u_{ij} - \nabla_j u_{ik}),$$

cet opérateur étant , à une constante près, la différentelle extérieure de u vue comme une 1-forme à valeur dans le cotangent (voir [2] 1.12. p.24). L'adjoint formel de D est

$$(D^*T)_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\nabla^k T_{kij} - \nabla^k T_{kji} + \nabla^k T_{ijk} + \nabla^k T_{jik}).$$

Ainsi on a

$$D^*Du_{ij} = -\nabla^k\nabla_k u_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla^k\nabla_i u_{jk} + \nabla^k\nabla_j u_{ik}).$$

Remarquons d'autre part que

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^* u_{ij} = -\frac{1}{2}(\nabla_i\nabla^k u_{jk} + \nabla_j\nabla^k u_{ik}).$$

et que

$$\nabla^k\nabla_j u_{ik} - \nabla_j\nabla^k u_{ik} = \mathrm{Ric}(g)_{qj}u_i^q - \mathrm{Riem}(g)_{qilj}u^{ql}$$

On obtient ainsi la formule de Weitzenböck :

$$\triangle_K := D^*D + \mathcal{L}\mathcal{L}^* = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric} - \mathrm{Riem}\,.$$

Par conséquent on a :

$$\Delta_L = 2(D^*D + \mathcal{L}\mathcal{L}^*) - \nabla^*\nabla \tag{3.1}$$

Si (M, g) est une variété compacte, nous noterons Π la projection orthogonale L^2 sur $\ker\Delta_L$. Ainsi, si $h_1, ..., h_k$ est une base L^2-orthonormée de $\ker\Delta_L$,

$$\Pi(h) = \sum_{i=1}^{k}\langle h, h_i\rangle_{L^2} h_i.$$

Nous pouvons énoncer la

Proposition 3.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ et c un réel non nul. L'opérateur $\Delta_L + c\Pi$ est un isomorphisme de $C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ dans $C^{k,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$.*

Démonstration. Le preuve est classique, nous en donnerons juste les grandes lignes. Notons $\mathcal{K}$ le noyau de dimension finie de Δ_L, ces éléments sont lisses par régularité elliptique. On note $\mathcal{K}^\perp$, l'orthogonal L^2 de $\mathcal{K}$. Alors

$$\Delta_L : H^2 \cap \mathcal{K}^\perp \longrightarrow \mathcal{K}^\perp$$

est un isomorphisme (voir par exemple les théorèmes 31 et 27 pages 463-364 de [2]) . Ensuite tout élément $h \in H^2$ se décompose en

$$h = u^\perp + u \in (H^2 \cap \mathcal{K}^\perp) \oplus \mathcal{K}.$$

L'application

$$h \mapsto \Delta_L(u^\perp) + cu \in K^\perp \oplus \mathcal{K}$$

est clairement un isomorphisme, or c'est $\Delta_L + c\Pi$. Il suffit ensuite d'utiliser la régularité elliptique pour conclure à l'isomorphisme entre les espaces de Hölder. □

Étudions maintenant plus précisément le noyau du Laplacien de Lichnerowicz.

Lemme 3.2.
i) Si $\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem}$ *est positif sur* L^2 *alors* $\ker \Delta_L = \ker \nabla$.
ii) Si La courbure de Ricci est parallèle et que le premier nombre de Betti est nul alors $\ker \Delta_L \subset \ker \operatorname{div}$.
Dans les deux cas nous avons

$$\ker \Delta_L \subset \ker \operatorname{div} \cap \ker(d \circ \operatorname{Tr}) \subset \ker B_g,$$

en particulier

$$B_g \circ \Pi = 0.$$

Démonstration. Par l'écriture (3.1), il est clair qu'on a toujours $\ker \nabla \subset \ker \Delta_L$. Pour l'autre inclusion, il suffit revenir à la définition de Δ_L (2.1). Enfin si la courbure de Ricci est parallèle, par [16] on a

$$\Delta_H \circ \operatorname{div} = \operatorname{div} \circ \Delta_L. \tag{3.2}$$

Pour la dernière inclusion rappelons juste que Δ_L respecte la décomposition $S_2 = \mathcal{G} \oplus \mathring{S}_2$ avec

$$\operatorname{Tr} \circ \Delta_L = \Delta \circ \operatorname{Tr}. \tag{3.3}$$

□

Afin de connaître aussi l'éventuelle positivité de Δ_L, étudions celle de $\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem}$. Nous donnons pour cela un lemme algébrique.

Lemme 3.3. *Soit un point x de M, on note* $\operatorname{Ric}_{\min}$ *la plus petite valeurs propre de* $\operatorname{Ric}(g)$ *en x,* $K_{\max}$ *et* $K_{\min}$ *le max et le min de la courbure sectionnelle en x. Alors pour tout $h \in \mathring{S}_2$ en x, on a l'inégalité ponctuelle :*

$$\langle (\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem})h, h\rangle_{g_x} \geq \max\{2\operatorname{Ric}_{\min} - (n-2)K_{\max}, nK_{\min}\}\|h\|^2_{g_x}.$$

Démonstration. La preuve est inspirée du lemme de Fujitani ([2] p.356) (voir aussi dans [13] la preuve du corollaire 3.4 p 356) mais adaptée au cas non forcément Einstein. Choisissons $h \in \mathring{S}_2$ un tenseur propre de $\mathrm{Ric}-\mathrm{Riem}$. Prenons une base orthonormée où h est diagonale, de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ avec $\lambda_1 = \sup|\lambda_i|$ (et $\sum \lambda_i = 0$). On pose

$$a = \frac{\langle(\mathrm{Ric}-\mathrm{Riem})h, h\rangle_{g_x}}{\|h\|^2_{g_x}}.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} a\lambda_1 & = & [(\mathrm{Ric}-\mathrm{Riem})h]_{11} = \sum_l R_{1l}h_{1l} - \sum_{i,k} R_{i1k1}h_{ik} \\ & = & R_{11}\lambda_1 - \sum_{i\neq 1} R_{i1i1}\lambda_i \\ & = & R_{11}\lambda_1 - \sum_{i\neq 1} K_{\max}\lambda_i + \sum_{i\neq 1}(K_{\max} - R_{i1i1})\lambda_i \\ & = & R_{11}\lambda_1 + K_{\max}\lambda_1 + \sum_{i\neq 1}(K_{\max} - R_{i1i1})\lambda_i \\ & \geq & R_{11}\lambda_1 + K_{\max}\lambda_1 - \sum_{i\neq 1}(K_{\max} - R_{i1i1})\lambda_1 \\ & = & 2R_{11}\lambda_1 - (n-2)K_{\max}\lambda_1 \\ & \geq & (2\,\mathrm{Ric}_{\min} - (n-2)K_{\max})\lambda_1 \ . \end{array}$$

Le même type de raisonnement donne

$$\begin{array}{rcl} a\lambda_1 & = & R_{11}\lambda_1 - \sum_{i\neq 1} K_{\min}\lambda_i - \sum_{i\neq 1}(R_{i1i1} - K_{\min})\lambda_i \\ & \geq & R_{11}\lambda_1 + K_{\min}\lambda_1 - \sum_{i\neq 1}(R_{i1i1} - K_{\min})\lambda_1 \\ & = & nK_{\min}\lambda_1 \ . \end{array}$$

□

4. Cas de la courbure de Ricci

Il est maintenant bien connu que l'équation de Ricci n'est pas elliptique du à l'invariance de la courbure par difféomorphisme. Nous allons modifier cette équation en s'inspirant de la méthode de DeTurck. On y ajoute donc un terme jauge de telle sorte que le cette nouvelle equation devienne elliptique tout en faisant en sorte que ses solutions soient solution de l'équation de Ricci. Nous devons aussi ici prendre en compte le fait que le Laplacien de Lichnerowicz peut avoir un noyau de dimension plus grande que 1, contrairement aux travaux précédents. Afin de construire notre nouvelle équation, rappelons quelques différentielles d'opérateurs.

Nous avons déjà (voir [2] par exemple)

$$D\,\mathrm{Ric}(g)h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \mathcal{L}_g B_g(h).$$

Le linéarisé en la première variable de l'opérateur de Bianchi est (voir par exemple [6])

$$[DB_{(.)}(R)](g)h = -RB_g(h) + T(g,R)h,$$

où R est identifié ici à l'endomorphisme de T^*M correspondant et

$$[T(g,R)h]_j = T(g,R)^{kl}_j h_{kl} = \frac{1}{2}(\nabla^k R^l_j + \nabla^l R^k_j - \nabla_j R^{kl})h_{kl}$$

En particulier, si g est Ricci paralllèle on a

$$[DB_{(.)}(\mathrm{Ric}(g))](g)h = -\mathrm{Ric}_g B_g(h).$$

où est Ric_g l'endomorphisme de T^*M donné par $(\omega_i) \mapsto (\mathrm{Ric}(g)_i^k \omega_k)$.

Rappelons enfin que pour toute métrique g, $B_g(\mathrm{Ric}(g)) = 0$ par l'identité de Bianchi.

L'équation que nous choisissons de résoudre sera

$$F(h,r) := \mathrm{Ric}(g+h) - R(h,r) - \mathcal{L}_g\{\mathrm{Ric}_g^{-1} B_{g+h}[R(h,r)]\} = 0, \tag{4.1}$$

où

$$R(h,r) = Ric(g) + r - \frac{1}{2}\Pi(h),$$

et Π est la projection orthogonale L^2 sur $\ker\Delta_L^g$.

Commençons par vérifier que les solutions de la nouvelle equation sont solutions de l'équation qui nous intéresse.

Proposition 4.1. *Sous les conditions du théorème 1.1, avec $\kappa = \Lambda = 0$, si $h \in C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ est assez petit, et que la métrique $g + h$ est solution de* (4.1)*, alors c'est une solution de*

$$\mathrm{Ric}(g+h) = R(h,r).$$

Démonstration. On applique B_{g+h} à l'équation (4.1). Remarquons que $B_{g+h}[\mathrm{Ric}(g+h)] = 0$ par l'identité de Bianchi. Ainsi, si on pose

$$\omega := \mathrm{Ric}_g^{-1} B_{g+h}(R(h,r)),$$

on obtient

$$P_{g+h}\omega := B_{g+h}[\mathcal{L}_g(\omega)] + \mathrm{Ric}_g \omega = 0.$$

L'opérateur P_g se lit en coordonnées locales :

$$(P_g\omega)_j = -\nabla^i \left[\frac{1}{2}(\nabla_i\omega_j + \nabla_j\omega_i)\right] + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla^i\omega_i + \mathrm{Ric}(g)_j^k\omega_k.$$

Commutons les dérivées et multiplions par 2, on obtient

$$2P_g = \Delta_g\omega + \mathrm{Ric}_g \omega = \Delta_H\omega.$$

Comme le premier nombre Betti est nul ($b_1 = 0$) l'opérateur P_g a un noyau L^2 trivial (et c'est un isomorphisme de $C^{k+1,\alpha}(M, \mathcal{T}_1)$ dans $C^{k-1,\alpha}(M, \mathcal{T}_1)$). Maintenant si h est petit dans $C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$, l'opérateur P_{g+h} reste injectif. On peut donc conclure que $\omega = 0$. □

Remarque 4.2. Le fait que $B_{g+h}[R(h,r)]$ s'annule prouve que l'application identité de $(M, g+h)$ dans $(M, R(h,r))$ est harmonique (voir [14] par exemple).

Nous allons maintenant construire les solutions de (4.1) par un argument de fonctions implicites dans des espaces de Banach.

Proposition 4.3. *Sous les conditions du théorème 1.1, avec $\kappa = \Lambda = 0$. Pour tout $r \in C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ petit, il existe un unique h proche de zéro dans $C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ solution de* (4.1).

Démonstration. On considère F comme application définie au voisinage de zéro dans $C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)\times C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$ à valeur dans $C^{k,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$. On a déjà $F(0,0)=0$. Compte tenue des différentielles des opérateurs données en début de section et du lemme 3.2, la différentielle relativement à h en 0 est

$$D_hF(0,0)=\frac{1}{2}\Delta_L+\frac{1}{2}\Pi.$$

Par la propositon 3.1, cet opérateur est un isomorphisme de $C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$ dans $C^{k,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$. Le théorème des fonctions implicites permet de conclure. □

Remarque 4.4. $R(h,r)$ peut etre remplacée par un 2-tenseur tel que $R(0,r)=\mathrm{Ric}(g)+r$ et $D_hR(0,0)=c\Pi$, $c\neq 0$. Par exemple dans [4] où le noyau de Δ_L est réduit aux multiples de g, on a

$$\Pi(h)=\frac{1}{n\,\mathrm{Vol}_g(M)}\Big(\int_M \mathrm{Tr}_g\, h d\mu_g\Big)g=:\frac{1}{n}<\mathrm{Tr}_g\, h>g,$$

et comme $\mathrm{Ric}(g)=g$, on peut prendre

$$R(h,r)=e^{\frac{1}{n}<\mathrm{Tr}_g\, h>}(\mathrm{Ric}(g)+r).$$

Exemple 4.5. Rappelons tout d'abord qu'une métrique Ricci parallèle est forcément localement le produit de variétés d'Einstein (voir par exemple [18]). En particulier si g est un produit de métriques d'Einstein à courbures scalaires strictement positives, alors comme $\mathrm{Ric}(g)>0$, le premier nombre Betti est nul et le théorème 1.1 s'applique. Si de plus les courbures sectionnelles sont positives (ou nulles), alors par le lemme 3.3, $\mathrm{Ric}-\mathrm{Riem}\geq 0$ et le noyau de Δ_L est réduit aux 2-tenseurs symétriques parallèles.

5. Opérateur de Ricci contravariant

On s'intéresse ici à l'inversion de l'opérateur de Ricci contravariant :

$$g\mapsto \overline{\mathrm{Ric}}(g)$$

dont les composantes en coordonnées locales sont $\overline{\mathrm{Ric}}(g)^{ij}=g^{ik}g^{jl}\,\mathrm{Ric}(g)_{kl}$. Nous utiliserons la notation évidente

$$\overline{\mathrm{Ric}}(g)=g^{-1}\,\mathrm{Ric}(g)g^{-1}.$$

Nous adaptons les étapes de la section 4. Tout d'abord on a

$$D\overline{\mathrm{Ric}}(g)h=g^{-1}[\frac{1}{2}\Delta_Lh-\mathcal{L}_gB_g(h)-2\,\mathrm{Ric}\,h]g^{-1}.$$

Posons $\overline{B}_g(\overline{R})=B_g(g\overline{R}g)$, ainsi si $\nabla\overline{R}=0$, on obtient

$$D\overline{B}_{(.)}(\overline{R})=-g\overline{R}B_g(h)+B_g(h\overline{R}g+g\overline{R}h).$$

Si de plus $\overline{R}=\lambda g^{-1}$, on trouve

$$D\overline{B}_{(.)}(\overline{R})h=\lambda B_g(h)=g\overline{R}B_g(h).$$

L'équation avec jauge que nous choisissons de résoudre ici sera

$$\overline{F}(h,\overline{r}) := g[\overline{\mathrm{Ric}}(g+h) - \overline{R}(h,\overline{r})]g + \mathcal{L}_g\{\mathrm{Ric}_g^{-1}\,\overline{B}_{g+h}[\overline{R}(h,\overline{r})]\} = 0, \tag{5.1}$$

où

$$\overline{R}(h,\overline{r}) = \overline{\mathrm{Ric}}(g) + \overline{r} - \frac{1}{2}g^{-1}\overline{\Pi}(h)g^{-1},$$

et $\overline{\Pi}$ est la projection orthogonale L^2 sur $\ker(\Delta_L^g - 4\,\mathrm{Ric})$.

Théorème 5.1. *Soient $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\alpha \in (0,1)$. Soit g une métrique d'Einstein à courbure scalaire non nulle. On suppose que le noyau de l'opérateur $\Delta_H - 4\,\mathrm{Ric}_g$ est trivial, ainsi que celui de $\Delta - 4\frac{R(g)}{n}$ agissant sur les fonctions . Alors pour tout $\overline{r} \in C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}^2)$ proche de zéro, il existe un unique h proche de zéro dans $C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$ telle que*

$$\overline{\mathrm{Ric}}(g+h) = \overline{\mathrm{Ric}}(g) + \overline{r} - \frac{1}{2}g^{-1}\overline{\Pi}(h)g^{-1}.$$

De plus l'application $\overline{r} \mapsto h$ est lisse au voisinage de zéro entre les Banach correspondants.

Démonstration. On a encore $\overline{F}(0,0) = 0$ et comme g est d'Einstein, par les hypothèses sur les noyaux et en utilisant les formules (3.2) et (3.3) on trouve que les éléments du noyau de $\Delta_L - 4\,\mathrm{Ric}$ sont à divergence nulle et trace nulle (dit aussi TT-tenseurs), en particulier $B_g \circ \overline{\Pi} = 0$. On trouve ainsi

$$D_h\overline{F}(0,0) = \frac{1}{2}\Delta_L - 2\,\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\overline{\Pi}.$$

L'analogue de la proposition (3.1) prouve que cet opérateur est un isomorphisme de $C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$ dans $C^{k,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$. Par le théorème des fonctions implicites, pour tout $\overline{r} \in C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}^2)$ petit, il existe h proche de zéro dans $C^{k+2,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$ tel que

$$\overline{F}(h,\overline{r}) = 0.$$

On applique ensuite $\overline{B}_{g+h}$ à l'équation (5.1), on obtient

$$\overline{P}_{g+h}\omega := B_{g+h}\mathcal{L}_g\omega - \mathrm{Ric}_g\,\omega = 0$$

où

$$\omega = \mathrm{Ric}_g^{-1}\,\overline{B}_{g+h}(\overline{R}(h,\overline{r})).$$

Or par hypothèse,

$$\overline{P}_g = \frac{1}{2}(\Delta - \mathrm{Ric}_g) - \mathrm{Ric}_g = \frac{1}{2}(\Delta_H - 4\,\mathrm{Ric}_g)$$

est injectif, ainsi si h est assez petit $\overline{P}_{g+h}$ le reste, donc $\omega = 0$. □

Exemple 5.2. Une variété compacte d'Einstein à courbure scalaire strictement négative, par exemple normalisée par

$$\mathrm{Ric}(g) = -g.$$

satisfait les hypothèses. Si l'on veut en savoir un peu plus sur la positivité et la projection, remarquons tout d'abord que

$$\Delta_L - 4\,\mathrm{Ric} = \Delta - 2(\mathrm{Ric} + \mathrm{Riem}).$$

Ainsi par le lemme de Fujitani ([2] p 356), si en plus la courbure sectionnelle est négative (ou nulle), on a Riem ≤ 1 et comme Ric $= -1$, on en déduit que $\Delta_L - 4\,\mathrm{Ric} \geq \Delta \geq 0$. Dans ce cas on a en particulier $\ker(\Delta_L - 4\,\mathrm{Ric}) \subset \ker \nabla$ mais comme $\ker \nabla \subset \ker \Delta_L$ (rappelons la formule (3.1)) on trouve $\ker(\Delta_L - 4\,\mathrm{Ric}) = \{0\}$ et l'inversion a lieu sans projection sur le noyau.

6. Autres opérateurs de courbure

Nous montrons ici que la méthode de la section 4 peut aussi être adaptée à d'autres opérateurs, affines en la courbure de Ricci. Pour κ et Λ deux constantes réelles, on définit le tenseur

$$\mathrm{Ein}(g) := \mathrm{Ric}(g) + \kappa R(g) g + \Lambda g.$$

Ainsi par exemple lorsque $\kappa = -\frac{1}{2}$ on retrouve le tenseur d'Einstein (avec constante cosmologique Λ), et si $\kappa = -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda = 0$ le tenseur de Schouten. On étudie l'inversion de l'opérateur Ein. On se donne donc E un 2-tenseur symétrique et l'on cherche g telle que

$$\mathrm{Ein}(g) = E. \tag{6.1}$$

Comme nous avons

$$\mathrm{Tr}_g \,\mathrm{Ein}(g) = (1 + n\kappa) R(g) + n\Lambda,$$

l'équation (6.1) est équivalente à

$$\mathrm{Ric}(g) = E - \frac{\kappa \,\mathrm{Tr}_g E + \Lambda}{1 + n\kappa} g$$

Pour E quelconque, on définit

$$\mathcal{B}_g(E) = \mathrm{div}_g E + \frac{2\kappa + 1}{2(1 + \kappa n)} d\,\mathrm{Tr}_g E = B_g(E) - \frac{(n-2)\kappa}{2(1+\kappa n)} d\,\mathrm{Tr}_g E,$$

de telle sorte que l'identité de Bianchi se traduise ici par

$$\mathcal{B}_g(Ein(g)) = 0.$$

Connaissant déjà la différentielle de $B_g(E)$ relativement à la métrique (voir [6] par exemple), on trouve que la différentielle de cet opérateur relativement à la métrique est

$$D[\mathcal{B}_{(.)}(E)](g)h = -E B_g(h) + \frac{(n-2)\kappa}{2(1+\kappa n)} d\langle E, h\rangle + T(E, h),$$

où E est identifié ici à l'endomorphisme de T^*M correspondant et

$$T(E,h)_j = \frac{1}{2}(\nabla_k E_{jl} + \nabla_l E_{kj} - \nabla_j E_{kl}) h^{kl}.$$

Par analogie avec la section 4, on définit

$$\mathcal{F}(h,e) := \mathrm{Ric}(g+h) - E + \frac{\kappa \operatorname{Tr}_{g+h} E + \Lambda}{1+\kappa n}(g+h) - \mathcal{L}_g \operatorname{Ein}_g^{-1} \mathcal{B}_{g+h}(E),$$

où Ein_g est l'endomorphisme de T^*M associé à $\operatorname{Ein}(g)$,

$$E = \operatorname{Ein}(g) + e - \frac{1}{2}\widetilde{\Pi}(h),$$

et $\widetilde{\Pi}$ une projection L^2 sur un espace de dimension fini à préciser ultérieurement. On a déjà

$$\mathcal{F}(0,0) = 0.$$

Si la courbure de Ricci est parallèle, on a $\nabla \operatorname{Ein}(g) = 0$ et si l'on suppose $\mathcal{B}_g \circ \widetilde{\Pi} = 0$, on obtient

$$D_h\mathcal{F}(0,0)h =$$

$$\frac{1}{2}\Delta_L h + \frac{1}{2}\widetilde{\Pi}(h) + \frac{1}{1+\kappa n}\left(\kappa \operatorname{Tr}_g \operatorname{Ein}(g)\, h + \Lambda h - \kappa\langle \operatorname{Ein}(g), h\rangle g - \frac{1}{2}\kappa \operatorname{Tr}_g \widetilde{\Pi}(h)\, g\right)$$

$$-\frac{(n-2)\kappa}{2(1+\kappa n)}\mathcal{L}_g \operatorname{Ein}_g^{-1} d\langle \operatorname{Ein}(g), h\rangle$$

Ainsi si g est d'Einstein $\operatorname{Ein}(g) = \tau g$ ou si $\kappa = 0$, on a

$$D_h\mathcal{F}(0,0)h =$$

$$\frac{1}{2}\Delta_L h + \frac{1}{2}\widetilde{\Pi}(h) + \frac{1}{1+\kappa n}\left(n\kappa\tau\, h + \Lambda h - \kappa\tau \operatorname{Tr}_g h\, g - \frac{1}{2}\kappa \operatorname{Tr}_g \widetilde{\Pi}(h)\, g\right)$$

$$-\frac{(n-2)\kappa}{2(1+\kappa n)}\nabla\nabla \operatorname{Tr}_g h.$$

Cette différentielle nous incite à définir l'opérateur

$$\begin{aligned}\mathcal{P}h &:= \Delta_L h + \tfrac{2(n\kappa\tau+\Lambda)}{1+\kappa n}h + \tfrac{\kappa}{n(1+\kappa n)}\Big((n-2)\Delta \operatorname{Tr}_g h - 2n\tau \operatorname{Tr}_g h\Big)\, g \\ &= (\Delta_L + 2\kappa R(g) + 2\Lambda)h + \tfrac{\kappa}{n(1+\kappa n)}\Big((n-2)\Delta \operatorname{Tr}_g h - 2n\tau \operatorname{Tr}_g h\Big)\, g.\end{aligned}$$

Ce dernier respecte le scindage $\mathcal{S}_2 = \mathcal{G} \oplus \mathring{\mathcal{S}}_2$. En particulier si u est une fonction sur M et $\mathring{h}$ un champ de 2-tenseurs symétrique sans trace, on a

$$\mathcal{P}(ug + \mathring{h}) = \frac{1}{1+\kappa n}p(u)g + \mathring{P}(\mathring{h}),$$

où

$$p(u) = (1 + 2(n-1)\kappa)\Delta u + 2\Lambda u,$$

et

$$\mathring{P}(\mathring{h}) = [\Delta_L + 2\kappa R(g) + 2\Lambda]\,\mathring{h}.$$

Pour u une fonction sur M et $\mathring{h}$ un champ de 2-tenseurs symétrique sans trace, on définit

$$\widetilde{\Pi}(ug + \mathring{h}) := \pi(u)g + \mathring{\Pi}(\mathring{h}),$$

où π est la projection L^2 sur noyau de p, et $\mathring{\Pi}$ la projection L^2 sur noyau de $\mathring{P}$. Ainsi si $h = ug$ on trouve

$$D_h\mathcal{F}(0,0)(ug) = \frac{1}{2}[p(u) + \pi(u)]g - \frac{(n-2)n\kappa}{2(1+\kappa n)}\mathring{\mathrm{Hess}}\, u,$$

où $\mathring{\mathrm{Hess}}\, u$ est la partie sans trace de la hessienne de u. Si $h = \mathring{h}$ est sans trace, on trouve

$$D_h\mathcal{F}(0,0)(\mathring{h}) = \frac{1}{2}\left(\mathring{P} + \mathring{\Pi}\right)\mathring{h}.$$

Théorème 6.1. *Soient $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\alpha \in (0,1)$, $\kappa \neq -\frac{1}{n}, -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda \in \mathbb{R}$. Soit g une métrique Ricci parallèle si $\kappa = 0$ et d'Einstein sinon, telle que* $\mathrm{Ein}(g)$ *est non dégénéré. On suppose que le noyau de p est trivial ou réduit aux constantes, et que* $\ker(\Delta_H + 2\kappa R(g) + 2\Lambda) = \{0\}$. *Alors pour tout $e \in C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ petit, il existe un unique h proche de zéro dans $C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ telle que*

$$\mathrm{Ein}(g+h) = \mathrm{Ein}(g) + e - \frac{1}{2}\widetilde{\Pi}(h),$$

De plus l'application $e \mapsto h$ est lisse au voisinage de zéro entre les Banach correspondants.

Démonstration. Les hypothèses sur les noyaux garantissent que les éléments du noyau de $\mathcal{P}$ sont de trace constante et, en utilisant (3.2), à divergence nulle. On a bien ainsi

$$\mathcal{B}_g \circ \widetilde{\Pi} = 0.$$

Les analogues évident de la proposition 3.1 prouvent que $p+\pi$ et $\mathring{P}+\mathring{\Pi}$ sont des isomorphismes de $C^{k+2,\alpha}$ dans $C^{k,\alpha}$ et donc que $D_h\mathcal{F}(0,0)$ aussi. Les calculs qui précèdent et le théorème des fonctions implicites impliquent alors que pour $e \in C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ petit, il existe h proche de zéro dans $C^{k+2,\alpha}(M, \mathcal{S}_2)$ tel que

$$\mathcal{F}(h,e) = 0.$$

On applique maintenant B_{g+h} à cette équation ainsi

$$B_{g+h}\mathcal{F}(h,e) = -\mathcal{B}_{g+h}(E) - B_{g+h}\mathcal{L}_g \,\mathrm{Ein}_g^{-1} \mathcal{B}_{g+h}(E) = 0.$$

On pose $\omega = \mathrm{Ein}_g^{-1} \mathcal{B}_{g+h}(E)$ alors

$$P_{g+h}\omega := B_{g+h}\mathcal{L}_g\omega + \mathrm{Ein}_g\,\omega = 0.$$

Mais par hypothèse

$$P_g = \frac{1}{2}(\Delta - \mathrm{Ric}_g) + \mathrm{Ein}_g = \frac{1}{2}(\Delta + \mathrm{Ric}_g + 2\kappa R(g) + 2\Lambda) = \frac{1}{2}(\Delta_H + 2\kappa R(g) + 2\Lambda)$$

est injectif, ainsi si h est petit P_{g+h} l'est encore donc $\omega = 0$.

$\square$

Exemple 6.2. Notons que quelque soit la courbure, si $\kappa > -1/2(n-1)$, quitte à prendre Λ assez grand, tous les opérateurs seront strictement positifs et l'inversion a lieu sans la projection. Afin de donner un exemple en courbure nulle, remarquons que pour le tore plat, il suffit de prendre $\Lambda > 0$. Ce dernier exemple nous a poussé à étudier dans un autre article [7], une version asymptotiquement euclidienne du théorème 6.1.

7. Image d'opérateurs de courbures de type Riemann-Christoffel

Nous voudrions, tout comme dans [5] montrer que l'image de certain opérateurs de type Riemann-Christoffel, sont des sous variétés dans C^∞, au voisinage de la métrique g. Nous cherchons donc tout d'abord un tenseur $\mathcal{E}in$ qui soit 4 fois covariant, ayant les mêmes propriétés algébriques que le tenseur de Riemann et affine en la courbure, on pose donc

$$\mathcal{E}in(g) = \mathrm{Riem}(g) + g \owedge (a\,\mathrm{Ric}(g) + bR(g)g + cg),$$

où $\owedge$ est le produit de Kulkarni-Nomizu ([2] p. 47). Comme nous voulons que $\mathrm{Tr}_g\,\mathcal{E}in(g)$ soit proportionnelle à $\mathrm{Ein}(g)$, cela nous impose

$$c = \frac{1+(n-2)a}{2(n-1)}\Lambda, \quad b = \frac{\kappa[1+a(n-2)]-a}{2(n-1)}.$$

On a alors

$$\mathrm{Tr}_g\,\mathcal{E}in(g) = [a(n-2)+1]\,\mathrm{Ein}(g).$$

Nous définirons la version de type Riemann-Christoffel de $\mathcal{E}in(g)$ par

$$[g^{-1}\mathcal{E}in(g)]^i_{klm} := g^{ij}\mathcal{E}in(g)_{jklm}.$$

Considérons $\mathcal{R}^1_3$, le sous-espace de $\mathcal{T}^1_3$ des tenseurs vérifiants

$$\tau^i_{ilm} = 0,\ \tau^i_{klm} = -\tau^i_{kml},\ \tau^i_{klm} + \tau^i_{mkl} + \tau^i_{lmk} = 0.$$

On définit l'espace de Fréchet

$$C^\infty = \cap_{k\in\mathbb{N}} C^{k,\alpha},$$

munit de la famille de semi-normes $\{\|.\|_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N}}$. On procède alors de façons similaire à [5] pour prouver que

Théorème 7.1. *Sous les conditions du théorème 6.1, on suppose de plus que le noyau de $\mathcal{P}$ est trivial, autrement dit $\widetilde{\Pi} = 0$. Alors l'image de l'application*

$$\begin{array}{lcl} C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^1_3) \\ h & \mapsto & (g+h)^{-1}\mathcal{E}in(g+h) - (g)^{-1}\mathcal{E}in(g) \end{array}$$

est une sous-variété lisse au voisinage de zéro.

Remarque 7.2. Dans la définition de $\mathcal{E}in$, le choix de $a \neq -1/2(n-1)$ est encore libre. Si nous voulions retrouver la courbure de Riemann lorsque $\kappa = \Lambda = 0$ et, lorsque $\kappa = -1/2$, un tenseur à divergence nulle (donc $a = -1$ et $b = 1/4$ via l'identité de Bianchi 2). On pourrait choisir par exemple

$$a = 2\kappa \ , \quad b = \frac{\kappa[2\kappa(n-2)-1]}{2(n-1)} \ , \quad c = \frac{\Lambda[2\kappa(n-2)+1]}{2(n-1)}.$$

Il n'est pas clair que ce choix soit plus naturel qu'un autre. Peut être qu'une identité de type Bianchi 2 qui en découlerai serait aussi plus légitime mais nous n'avons pas pu trancher à ce stade.

Références

[1] Alfred Baldes, *Nonexistence of Riemannian metrics with prescribed Ricci tensor*, Nonlinear problems in geometry (Mobile, Ala., 1985), Contemp. Math., vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 1–8. MR 848927 (87k :53085)

[2] A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 10, Springer Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1987.

[3] Ph. Delanoë, *Obstruction to prescribed positive Ricci curvature*, Pacific J. Math. **148** (1991), no. 1, 11–15.

[4] ______, *Local solvability of elliptic, and curvature, equations on compact manifolds*, J. Reine Angew. Math. **558** (2003), 23–45. MR 1979181 (2004e :53054)

[5] E. Delay, *Etude locale d'opérateurs de courbure sur l'espace hyperbolique*, J. Math. Pures Appli. **78** (1999), 389–430.

[6] ______, *Study of some curvature operators in the neighbourhood of an asymptotically hyperbolic Einstein manifold*, Advances in Math. **168** (2002), 213–224.

[7] ______, *Inversion d'opérateurs de courbure au voisinage de la métrique euclidiennne*, (2014), hal–00973138.

[8] E. Delay and M. Herzlich, *Ricci curvature in the neighbourhood of rank-one symmetric spaces*, J. Geometric Analysis **11** (2001), no. 4, 573–588.

[9] D. DeTurck, *Existence of metrics with prescribed ricci curvature : Local theory*, Invent. Math. **65** (1981), 179–207.

[10] Dennis DeTurck and Hubert Goldschmidt, *Metrics with prescribed Ricci curvature of constant rank. I. The integrable case*, Adv. Math. **145** (1999), no. 1, 1–97.

[11] Dennis M. DeTurck, *Metrics with prescribed Ricci curvature*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, pp. 525–537.

[12] ______, *Prescribing positive Ricci curvature on compact manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **43** (1985), no. 3, 357–369 (1986).

[13] Dennis M. DeTurck and Norihito Koiso, *Uniqueness and nonexistence of metrics with prescribed Ricci curvature*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 5, 351–359.

[14] C.R. Graham and J.M. Lee, *Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball*, Adv. Math. **87** (1991), 186–225.

[15] Richard Hamilton, *The Ricci curvature equation*, Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 2, Springer, New York, 1984, pp. 47–72. MR 765228 (86b :53040)

[16] A. Lichnerowicz, *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*, Pub. Math. de l'IHES **10** (1961), 5–56.

[17] A. Pulemotov, *Metrics with prescribed ricci curvature near the boundary of a manifold*, Mathematische Annalen (2013), no. 357.

[18] H. Wu, *Holonomy groups of indefinite metrics*, Pacific J. Math. **20** (1967), 351–392.

Erwann Delay, Labo. de Mathématiques d'Avignon, Fac. des Sciences, F84916 Avignon, France

E-mail address: Erwann.Delay@univ-avignon.fr

URL: http://www.univ-avignon.fr/fr/recherche/annuaire-chercheurs/membrestruc/personnel/delay-erwann-1.html