UNE MACHINE À TENSEURS TT SUR LES VARIÉTÉS D'EINSTEIN

Erwann Delay

UNE MACHINE À TENSEURS TT SUR LES VARIÉTÉS D'EINSTEIN

ERWANN DELAY

RÉSUMÉ. En toutes dimensions $n \geq 3$, on introduit un opérateurs différentiel d'ordre 4 qui, sur les variétés d'Einstein, transforme les (champs de) deux tenseurs symétriques de trace nulle en tenseurs TT. Une large classe de tenseurs TT (voir tous) sont obtenus ainsi, la restriction de notre opérateur à ces tenseurs étant la composée de deux Laplaciens de Lichnerowicz translatés.

ABSTRACT. In all dimensions $n \geq 3$, we introduce a differential operator of order 4 which, on Einstein manifolds, transforms the (fields of) trace free symmetric two tensors into TT-tensors. A large class of of TT-tensors (eventually all) are obtained in this way, the restriction of our operator to these tensors being the composition of two shifted Lichnerowicz Laplacians.

Mots clefs : Laplacien de Lichnerowicz, tenseurs symétriques, tenseurs TT, variété d'Einstein.

Keywords : Lichnerowicz Laplacian, symmetric tensors, TT tensors, Einstein manifold

2010 MSC : 35P15, 58J50, 47A53.

TABLE DES MATIÈRES

Date: 4 octobre 2021.

1. Introduction

En géométrie Riemannienne, comme en relativité générale, les champs de tenseurs symétriques de trace nulle et à divergence nulle, dit tenseurs TT (transverse traceless tensors) , sont d'une importance fondamentale puisqu'ils correspondent aux variations de métriques qui sont transverses aux directions conformes ou par difféomorphisme. Les tenseurs TT apparaissent aussi dans la méthode conforme de construction de données initiales relativistes. Il est donc naturel de s'intéresser à leurs existence et si possible d'en construire explicitement. Une construction simple sera particulièrement utile pour tester numériquement des problèmes de stabilité de métriques d'Einstein Riemanniennes mais aussi pour la relativité numérique.

En dimension trois, Robert Beig a étudié cette question sur les variétés conformément plates [2], il exhibe un opérateur différentiel d'ordre 3 transformant les tenseurs sans trace en tenseurs TT. Si de surcroît la variété est simplement connexe à seconde cohomologie de De Rham triviale, tous les tenseurs TT peuvent être obtenus ainsi (voir aussi [3] pour d'autres espaces à courbure constante). De même, toujours en dimension trois, des constructions de tenseurs TT à support compacts sont données dans [6] en utilisant la dualité de Hodge et dans [10] grâce aux harmoniques sphériques.

En dimensions supérieures paires, les adjoints des linéarisés des tenseurs de Bach ou d'Obstruction, pris en une métrique d'Einstein, auront la même propriété de transformation des tenseurs sans trace en tenseurs TT, mais leur ordre sera égal à la dimension, ce qui rend difficile les calculs en grandes dimensions.

Dans [11], Romain Gicquaud prouve l'existence de tenseurs TT lisses (à supports compact) sur l'espace Euclidien en toutes dimensions $n \geq 3$. Inspiré par la transposition du problème via la transformée de Fourier, il met en évidence un opérateur d'ordre 4 transformant les tenseurs symétriques sans trace sur $\mathbb{R}^n$, en tenseurs TT.

Il aussi été prouvé dans [8] que sur tout ouvert de toute variété riemannienne lisse, l'espace des tenseurs TT lisses à support compacts est de dimension infinie, étendant ainsi un résultat de [5]. La preuve est complètement différente, et la construction utilisée purement théorique est difficile à mettre en oeuvre pour une construction explicite.

Le but de cette note est de donner, grâce à un opérateur linéaire d'ordre 4, une machinerie simple pour construire, en toutes dimensions, une large classe de tenseurs TT (tous dans bien des cas) sur les variétés d'Einstein. La propriété TT étant covariante conforme, on en déduit facilement une construction pour toute métrique conformément Einstein.

Afin de décrire notre résultat, quelques définitions s'imposent. Tout d'abord, Δ_L désignera le Laplacien de Lichnerowicz, $\mathring{\mathcal{L}}$ l'opérateur de

Killing conforme, div la divergence sur les 2-tenseurs, enfin d et d^* la différentielle extérieure et la divergence sur les formes différentielles (les définitions précises des opérateurs sont données en section 2, notamment les normalisations et conventions de signe) . Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1.1. *Sur une variété riemannienne lisse* (M, g) *de dimension* $n \geq 3$ *et d'Einstein où* $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$ *, l'opérateur autoadjoint*

$$P = (\Delta_L - 2\lambda)\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right) - \mathring{\mathcal{L}}\left(d^* d + \frac{n}{2(n-1)} dd^* - \frac{n}{n-1}\lambda\right) \mathrm{div}$$

envoie tout tenseurs symétrique de trace nulle sur un tenseur TT. On a ainsi

$$\mathrm{Tr}\ P = 0\,, \quad \mathrm{div}\ P = 0 \qquad et \qquad P\,\mathring{\mathcal{L}} = 0.$$

Si de plus M *est compacte sans bord, l'image de* P *est de codimension finie, dans le sens où dans* C^∞ *:*[1]

$$Im\ P = \left(\ker(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT} + \ker(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)_{|TT}\right)^{\perp},$$

l'orthogonal L^2 *étant pris dans* $TT := \ker \mathrm{Tr} \cap \ker \mathrm{div}$.

Nous verrons que notre opérateur P est en fait la composée de l'adjoint du linéarisé du tenseur de Schouten avec l'adjoint de la linéarisation du tenseur de Ricci sans trace (agissant sur les tenseurs de trace nulle) :

$$P = 4\, D\,\mathrm{Sch}(g)^* D\mathring{\mathrm{Ric}}(g)^*.$$

Une variété d'Einstein est dite stable (resp. strictement stable) si l'opérateur $\Delta_L - 2\lambda$ est positif (resp. strictement positif), au sens L^2 sur les tenseurs TT. L'étude de cette stabilité sur les variétés compactes sans bords a été étudiée par de nombreux auteurs, en commençant par [13] (voir [7] pour un résultat plus récent ou [14] pour un survey). Il semble qu'il n'y ait aucun exemple d'instabilité si $\lambda \leq 0$ (ce n'est pas le cas si la variété est non compacte ou si λ est strictement positif). Comme sur de telles variétés, tout tenseurs TT propre de Δ_L, pour une valeur propre différente de 2λ et $\frac{n}{n-1}\lambda$ est clairement dans l'image de P par orthogonalité L^2, le test de stabilité peut ainsi se faire en premier lieu sur des tenseurs TT construits via P.

Au cours de cette note on présentera aussi un opérateur bien connu d'ordre deux, permettant de construire une grande partie des tenseurs symétriques à divergence nulle (voir tous) à partir de tenseurs symétriques. Ces tenseurs ayant aussi leurs importance, comme pour la contrainte hamiltonienne des données initiales relativistes.

REMERCIEMENTS. Article financé en partie par l'agence nationale de la recherche ANR-17-CE40-0034 (projet CCEM).

1. La somme étant L^2-orthogonale si $\lambda \neq 0$.

2. Définitions, notations et conventions

Nous décrivons ici certains objets utilisés dans cette note. Tout d'abord, (M, g) désignera une variété riemannienne , et ∇ sa connexion de Levi-Civita .

On notera $\mathcal{T}_r^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang r et et contravariants de rang q. Si $q = 0$, on notera $\mathcal{S}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques et $\mathring{\mathcal{S}}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques de trace nulle (relativement à g). On appliquera la convention de sommation , en utilisant g_{ij} et son inverse g^{ij} afin d'abaisser ou de remonter les indices.

L^2 est l'espace de Hilbert usuel de fonctions ou tenseurs munit du produit (resp. norme)

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_M \langle u, v\rangle_g dV_g \text{ (resp. } |u|_{L^2} = (\int_M |u|_g^2 dV_g)^{\frac{1}{2}}),$$

où $\langle u, v\rangle_g$ (resp. $|u|_g$) est le produit usuel (resp. norme) de fonctions ou tenseurs relatif à g, et la mesure dV_g celle induite par g.

On note d la différentielle extérieure agissant sur les formes différentielles, d^* son adjoint formel (pour $L^2(dV_g)$). Le Laplacien sur les fonctions est définit par

$$\Delta = \nabla^*\nabla = -Tr\nabla^2 = d^*d,$$

où ∇^* est l'adjoint formel de ∇ . Pour les 1-formes on notera de plus

$$\Delta_H = d^*d + dd^* = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric},$$

le Laplacien de Hodge correspondant.

La divergence d'un 2-tenseur symétrique est donnée par :

$$(\mathrm{div}\ h)_i = -\nabla^j h_{ij}$$

On considère aussi pour $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille d'opérateurs suivants :

$$({}^\alpha\mathcal{L}X)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i - \alpha\nabla^k X_k g_{ij}\ ,\quad {}^\alpha\mathcal{L}^* = 2\,div + \alpha d\,\mathrm{Tr}\,.$$

Pour $\alpha = 0$, on reconnaît l'opérateur de Killing

$$(\mathcal{L}X)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i\ ,\quad \mathcal{L}^* = 2\,div,$$

On peut ainsi écrire

$${}^\alpha\mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha d^*(.)g.$$

Si $\alpha = \frac{2}{n}$, l'opérateur de Ahlfors ou de Killing conforme apparaît :

$$\mathring{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{2}{n}d^*(.)g = {}^{\frac{n}{2}}\mathcal{L}\ ,\quad \mathring{\mathcal{L}}^* = 2\,div,$$

ce dernier donnant lieu au Laplacien dit vectoriel :

$$\begin{aligned} div\,\mathring{\mathcal{L}} &= \nabla^*\nabla_g - \operatorname{Ric} + \tfrac{n-2}{n}dd^* \\ &= \Delta_{\mathrm{H}} - 2\operatorname{Ric} + \frac{n-2}{n}dd^* \\ &= d^*d + 2\frac{n-1}{n}dd^* - 2\operatorname{Ric}. \end{aligned}$$

L'opérateur de Bianchi et son adjoint ressortiront aussi ($\alpha = 1$) :

$$\mathcal{B} = 2\,div + d\,Tr$$

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{L} + d^*(.)g = {}^1\mathcal{L}\ .$$

Le Laplacien de Lichnerowicz est définit en coordonnés locales par

$$\Delta_L h_{ij} = -\nabla^k\nabla_k h_{ij} + R_{ik}h^k_j + R_{jk}h^k_j - 2R_{ikjl}h^{kl},$$

où R_{ij} est la curbure de Ricci de g et R_{ijkl} sa courbure de Riemann. On rappelle que la linéarisation des opérateurs de Ricci et de courbure scalaire sont (voir [1] par exemple) :

$$D\operatorname{Ric}(g) = \frac{1}{2}\Delta_L - \frac{1}{4}\mathcal{L}\mathcal{B},$$

$$D\mathrm{R}(g) = d^*\operatorname{div} + \Delta\operatorname{Tr} - \langle \operatorname{Ric}(g), .\rangle = \frac{1}{2}d^*({}^2\mathcal{L})^* - \langle \operatorname{Ric}(g), , \rangle.$$

Ainsi si l'on pose pour $\kappa, \Lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Ein}(g) = \operatorname{Ric}(g) + \kappa R(g)g + \Lambda g,$$

alors

$$D\operatorname{Ein}(g)h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{4}\mathcal{L}\mathcal{B}\,h + \kappa(d^*\operatorname{div} h + \Delta\operatorname{Tr} h - \langle\operatorname{Ric}(g), h\rangle)g + (\kappa R(g) + \Lambda)h.$$

Si $\operatorname{Ric}(g) = \lambda g$, ce dernier vaut alors

$$D\operatorname{Ein}(g)h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{4}\mathcal{L}\mathcal{B}\,h + \kappa(d^*\operatorname{div} h + \Delta\operatorname{Tr} h - \lambda\operatorname{Tr} h)g + (\Lambda + \kappa n\lambda)h.$$

Les adjoints respectifs étant

$$D\operatorname{Ric}(g)^* = \frac{1}{2}(\Delta_L - \mathcal{B}^*\operatorname{div}),$$

$$D\mathrm{R}(g)^* = \nabla\nabla + \Delta(.)g - \operatorname{Ric} = \frac{1}{2}\,{}^2\mathcal{L}\,d - \operatorname{Ric},$$

et

$$D\operatorname{Ein}(g)^*h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{2}\mathcal{B}^*\operatorname{div}\,h + \kappa(\nabla\nabla\operatorname{Tr} h + \Delta\operatorname{Tr} hg - \operatorname{Tr} h\operatorname{Ric}(g)) + (\kappa R(g) + \Lambda)h.$$

Si $\operatorname{Ric}(g) = \lambda g$, on a ainsi

$$D\operatorname{Ein}(g)^*h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{2}\mathcal{B}^*\operatorname{div}\,h + \kappa(\nabla\nabla\operatorname{Tr} h + \Delta\operatorname{Tr} h - \lambda\operatorname{Tr} h)g + (\Lambda + \kappa n\lambda)h,$$

et on peut réécrire

$$D\mathrm{R}(g)^* = \operatorname{Oba}(g) - [\operatorname{Tr}\ \operatorname{Oba}(g)(.)]g \quad \text{avec } \operatorname{Oba}(g) = \nabla\nabla + \frac{\lambda}{n-1}(.)g.$$

Deux tenseurs particulier ressortiront, correspondants respectivement à $(\kappa,\Lambda)=(-\frac{1}{n},0)$ et $(\kappa,\Lambda)=(-\frac{1}{2(n-1)},0)$, le tenseur de Ricci sans trace

$$\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}(g)=\mathrm{Ric}(g)-\frac{1}{n}R(g)g,$$

et le tenseur de Schouten

$$\mathrm{Sch}(g)=\mathrm{Ric}(g)-\frac{1}{2(n-1)}R(g)g.$$

3. Composition et commutation

Nous étudions ici la composition de certains opérateurs définis précédemment, notamment d'éventuelles commutations.

Lemme 3.1. *Pour tous réels α et β on a*

$$^{\beta}\mathcal{L}^{*}(^{\alpha}\mathcal{L})=\,^{\alpha}\mathcal{L}^{*}(^{\beta}\mathcal{L})=2\left(d^{*}d+(2-\alpha-\beta+\frac{n}{2}\alpha\beta)dd^{*}-2\,\mathrm{Ric}\right)$$

Démonstration. On a a déjà

$$\begin{aligned}div\,(^{\alpha}\mathcal{L}) &= \nabla^{*}\nabla_{g}-\mathrm{Ric}+(-\alpha+1)dd^{*}\\ &= \Delta_{\mathrm{H}}-2\,\mathrm{Ric}+(-\alpha+1)dd^{*}\\ &= d^{*}d+(2-\alpha)\,dd^{*}-2\,\mathrm{Ric}.\end{aligned}$$

Ensuite comme

$$\mathrm{Tr}(^{\alpha}\mathcal{L})=(n\alpha-2)d^{*},$$

on en déduit

$$^{\beta}\mathcal{L}^{*}(^{\alpha}\mathcal{L})=2(d^{*}d+(2-\alpha)\,dd^{*}-2\,\mathrm{Ric})+\beta(n\alpha-2)dd^{*}.$$

□

Remarque 3.2. Pour tout α dans $\mathbb{R}$,

$$^{\alpha}\mathcal{L}^{*}(^{\alpha}\mathcal{L})=2\left(d^{*}d+(\frac{n}{2}\alpha^{2}-2\alpha+2)dd^{*}-2\,\mathrm{Ric}\right),$$

en particulier pour $\alpha=0$:

$$div\,\mathcal{L}=\nabla^{*}\nabla_{g}+dd^{*}-\mathrm{Ric}=d^{*}d+2dd^{*}-2\,\mathrm{Ric}\,.$$

Nous aurons aussi besoin de la variante suivante d'un résultat de André Lichnerowicz.

Proposition 3.3. *Si (M,g) est Ricci parallèle (c-à-d $\nabla Ric(g)=0$) alors pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$,*

$$(^{\alpha}\mathcal{L})^{*}\,\Delta_{L}=\Delta_{H}\,(^{\alpha}\mathcal{L})^{*}\ ,\quad (^{\alpha}\mathcal{L})\,\Delta_{H}=\Delta_{L}\,(^{\alpha}\mathcal{L}),$$

en particulier

$$\mathrm{div}\;\Delta_{L}=\Delta_{H}\;\mathrm{div}\ ,\quad \Delta_{L}\,\mathcal{L}=\mathcal{L}\,\Delta_{L}\ ,\quad \Delta_{L}\,\mathring{\mathcal{L}}=\mathring{\mathcal{L}}\,\Delta_{L}$$

Démonstration. Pour $\alpha = 0$, c'est un résultat bien connu de A. Lichnerowicz [15]. Ainsi par linéarité, pour la première égalité il suffit de vérifier que

$$d \text{ Tr } \Delta_L = \Delta_H \, d \text{ Tr} \, .$$

Or cette égalité découle du fait que sur toute variété riemannienne (pas forcément Ricci parallèle) on a

$$\text{Tr } \Delta_L = \Delta \text{ Tr} \quad \text{et} \quad \Delta_H \, d = d \, \Delta.$$

La deuxième égalité de la proposition a simplement lieu par dualité de la première, et les autres correspondent à $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{n}{2}$.

□

Rappelons la proposition classique suivante.

PROPOSITION 3.4. *Si (M, g) est à courbure scalaire constante,*

$$DR(g)\mathcal{L} = 0 \;\; \textit{et} \;\; div \, DR(g)^* = 0.$$

Si de plus g est d'Einstein ($Ric(g) = \lambda g$),

$$(D \, \text{Ric}(g) - \lambda)\mathcal{L} = 0 \;\; \textit{et} \;\; div \, (D \, \text{Ric}(g)^* - \lambda) = 0.$$

Démonstration. Pour tout champ X lisse sur M, on considère le flot à un paramètre associé ϕ_t, avec $\phi_0 = Id$. Si g est à courbure scalaire constante

$$D\text{R}(g)\mathcal{L}_X(g) = \frac{d}{dt} R(\phi_t^* g)_{|t=0} = 0,$$

où $\mathcal{L}_X(g)$ est la dérivée de lie de g dans la direction de X, la première égalité de la proposition est prouvée. La deuxième égalité est simplement la duale de la première. Si g est d'Einstein, on procède de même en dérivant l'équation

$$\text{Ric}(\phi_t^* g) - \lambda \phi_t^* g = 0$$

□

Remarque 3.5. Comme utilisé dans la preuve précédente, on rappelle qu'un opérateur L linéaire à valeur dans les tenseurs symétriques vérifie div $L = 0$ ssi $L^* \mathcal{L} = 0$. Par la suite nous utiliserons aussi souvent le fait que Tr $L = 0$ ssi $\forall u \in C^\infty(M)$, $L^*(ug) = 0$.

Enfin rappelons le calcul bien connu suivant de transformation conforme, qui prouve que la propriété TT est covariante conforme et que l'opérateur de Schouten varie agréablement par transformation conforme.

LEMME 3.6. *Si $g' = e^f g$, pour une fonction f sur M, alors pour tout 2-tenseur symétrique h*

$$div_{g'} h = e^{-\frac{n}{2} f} div(e^{\frac{n-2}{2} f} h) + \frac{1}{2} e^{-f} (\text{Tr}_g \, h) df$$

et pour toute $1-$forme ω,

$$\mathring{\mathcal{L}}_{g'} \omega = e^f \mathring{\mathcal{L}}_g (e^{-f} \omega).$$

On a aussi

$$\mathrm{Sch}(g') = \mathrm{Sch}(g) - \frac{n-2}{2}\nabla\nabla f + \frac{n-2}{4} df\, df - \frac{n-2}{8}|df|_g^2 g,$$

4. Tenseurs symétriques à divergence nulle

Si l'on désire simplement construire des tenseurs symétriques à divergence nulle, un opérateur naturel d'ordre deux suffit.

Proposition 4.1. *Sur une variété d'Einstein telle que $Ric(g) = \lambda g$, pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, l'opérateur*

$$\mathcal{P} = \Delta_L - \mathcal{B}^* \, div - 2\lambda + 2\kappa(\nabla\nabla + \Delta(.)g - \lambda(.)g)\,\mathrm{Tr}(.) = 2(D\,\mathrm{Ein}(g)^*),$$

avec $\Lambda = -(1+n\kappa)\lambda$, envoie tout tenseur symétrique sur un tenseurs symétrique à divergence nulle :

$$\mathrm{div}\ \mathcal{P} = 0.$$

Si de plus M est compacte sans bord, on a dans C^∞ , si $\kappa \neq -\frac{1}{n}$:

$$Im\ \mathcal{P} = \ker\,\mathrm{div} \cap \left(\ker\,(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT}\right)^{\perp_{L^2}} + Im\, DR(g)^*,$$

où $TT = \ker\,\mathrm{div} \cap \ker\,\mathrm{Tr}$. Si $\kappa = -\frac{1}{n}$, l'image est :

$$Im\ \mathcal{P} = \ker\,\mathrm{div} \cap \left(\ker\,(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT}\right)^{\perp_{L^2}} + Im\, DR(g)^* d^*.$$

Démonstration. Pour simplifier commençons par le cas où $\kappa = 0$. On peut alors utiliser la proposition 3.4 directement ou le calcul suivant :

$$\mathrm{div}\ \mathcal{P} = \mathrm{div}\ \Delta_L - \mathrm{div}\ \mathcal{B}^*\ \mathrm{div} - 2\lambda\ \mathrm{div} = \Delta_H\ \mathrm{div} - (\Delta_H - 2\lambda)\ \mathrm{div} - 2\lambda\ \mathrm{div} = 0.$$

Sur une variété riemannienne compacte sans bord et lisse, d'après [4], tout tenseur symétrique lisse h se décompose en

$$h = h_{TT} + \mathring{\mathcal{L}}w + ug,$$

avec h_{TT} tenseur TT , la décomposition étant L^2-orthogonale. On a

$$\mathcal{P}h_{TT} = (\Delta_L - 2\lambda)h_{TT},$$

et comme $\Delta_L\mathcal{L} = \mathcal{L}\Delta_H$ et que $(d^*)^2 = 0$ on trouve

$$\mathcal{P}\mathcal{L}w = -\mathcal{L}dd^*w - 2\Delta d^*w\, g + 2\lambda d^*w\, g = -2(\nabla\nabla d^*w + \Delta d^*w\, g - \lambda d^*w\, g)$$

Par ailleurs pour toute fonction u, on a

$$\mathcal{P}(ug) = 2(\nabla\nabla u + \Delta u\, g - \lambda u g) = 2D\mathrm{R}(g)^*u,$$

on remarque ainsi que $\mathcal{P}\mathcal{L} = \mathcal{P}(-d^*(.)g)$ en particulier

$$\mathcal{P}\mathring{\mathcal{L}} = \left(\frac{2}{n} - 1\right)\mathcal{P}(d^*(.)g) = 2\left(\frac{2}{n} - 1\right)D\mathrm{R}(g)^*\, d^*.$$

Si maintenant κ est quelconque, la courbure scalaire étant constante, on a $D\mathrm{R}(g)\mathcal{L} = 0$ on retrouve ainsi $\mathrm{div}\, D\mathrm{R}(g)^* = 0$. Pour toute constante $\kappa \in \mathbb{R}$, on aura donc aussi

$$\mathrm{div}(\mathcal{P}) = 0.$$

Ensuite par des calculs similaires à ceux qui précèdent on obtient

$$\mathcal{P}\mathcal{L} = -2(2\kappa+1)D\mathrm{R}^*(g)d^*,$$

et

$$\mathcal{P}(ug) = 2(1+\kappa n)D\mathrm{R}^*(g)u,$$

il en résulte

$$\mathcal{P}^{\,\alpha}\mathcal{L} = -2(1-\alpha+(2-n\alpha)\kappa)D\mathrm{R}^*(g)d^*,$$

en particulier

$$\mathcal{P}\mathring{\mathcal{L}} = -2(1-\frac{2}{n})D\mathrm{R}^*(g)d^*.$$

Ainsi l'image de $\mathcal{P}$ est la même pour toute valeur de $\kappa \neq -\frac{1}{n}$ (on ne produit pas d'autres tenseurs à divergence nulle par changement de κ). Si $\kappa = -\frac{1}{n}$, pour toute fonction u, on trouve $\mathcal{P}(ug) = 0$, et l'image de notre opérateur devient celle annoncée. $\square$

Remarque 4.2. On pourrait aussi linéariser l'identité de Bianchi

$$\mathcal{B}(\mathrm{Ric}(g)) = 0,$$

grâce au linéarisé de $\mathcal{B}$ et de Ric (voir par exemple [9]) et ainsi obtenir un opérateur $\tilde{P}$ du même type mais dont l'image est dans le noyau de $\mathcal{B}$. Pour avoir un opérateur à image dans ker div il faudra alors prendre $\tilde{P} - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\tilde{P}(.)g$.

Remarque 4.3.
• Si $\kappa \neq -\frac{1}{n}$, L'image de $\mathcal{P}\mathring{\mathcal{L}}$ est la même que celle de $\mathcal{P}^{\,\alpha}\mathcal{L}$ pour toute valeur de $\alpha \neq \frac{1+2\kappa}{1+n\kappa}$, et si $\alpha = \frac{1+2\kappa}{1+n\kappa}$,

$$\mathcal{P}^{\,\alpha}\mathcal{L} = 0.$$

• Si $\kappa = -\frac{1}{n}$, comme $\mathcal{P}(ug) = 0$, on en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}\mathring{\mathcal{L}} = \mathcal{P}^{\,\alpha}\mathcal{L}$.

Comme $\mathcal{P}$, avec $\kappa = -\frac{1}{n}$, sera un des opérateurs utilisés pour la construction des tenseurs TT, nous allons décrire aussi ici son noyau. On a déjà

$$\ker\mathcal{P} = \ker\left[\mathcal{P}_{|\ker\operatorname{Tr}}\right] \oplus C^\infty(M)g = \ker\left[(\Delta_L - 2\lambda - \beta^*\operatorname{div})_{|\ker\operatorname{Tr}}\right] \oplus C^\infty(M)g.$$

Soit $h = h_{TT} + \mathring{\mathcal{L}}w$ dans le noyau de $\mathcal{P}$, avec h_{TT} tenseur TT. On a

$$\mathcal{P}h = (\Delta_L - 2\lambda)h_{TT} - 2\left(1-\frac{2}{n}\right)D\mathrm{R}^*(g)d^*w = 0,$$

La trace de cette équation implique $(\Delta - \frac{\lambda n}{n-1})d^*w = 0$, qui une fois réinsérée dans l'équation donne

$$(\Delta_L - 2\lambda)h_{TT} - 2\left(1-\frac{2}{n}\right)\mathring{\mathrm{Hess}}\, d^*w = 0.$$

Ensuite $\Delta_L - 2\lambda$ respectant la décomposition TT $\oplus$ Im$\mathring{\mathcal{L}}$, sur toute variété compacte sans bord on aura

$$\ker \mathcal{P} = \ker[(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT}] \oplus \mathring{\mathcal{L}}\left(\ker\left(\nabla\nabla + \frac{\lambda(.)}{n-1}g\right)d^*\right) \oplus C^\infty(M)g.$$

On rappelle ici que $\ker\left(\nabla\nabla + \frac{\lambda(.)}{n-1}g\right)$, est trivial si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 0$ et (M,g) n'est pas la sphère cannonique [16], égal à $\mathbb{R}$ si $\lambda = 0$, enfin un espace de dimension $n+1$ bien connu si (M,g) est la sphère cannonique [16].

Il peut aussi etre utile de construire des tenseurs dans le noyau de de certains ${}^{\alpha}\mathcal{L}^*$ comme pour la contrainte hamiltonienne des données initiales relativistes , correspondant à $\alpha = 2$ (voir [3] par exemple en dimension 3) ou l'opérateur de Bianchi ($\alpha = 1$). Pour cela, il suffit de décaler notre opérateur $\mathcal{P}$ via sa trace comme suit.

Corollaire 4.4. *Pour $\alpha \neq \frac{2}{n}$, l'opérateur*

$${}^{\alpha}\mathcal{P} = \mathcal{P} + \frac{\alpha}{2 - n\alpha}\,\mathrm{Tr}\;\mathcal{P}(.)g$$

envoie tout tenseur symétrique sur un tenseur symétrique dans le noyau de $({}^{\alpha}\mathcal{L})^* = (2\,\mathrm{div} + \alpha d\;\mathrm{Tr})$:

$$({}^{\alpha}\mathcal{L})^*\,{}^{\alpha}\mathcal{P} = 0$$

Démonstration. Un calcul direct permet de vérifier que $\mathrm{div}\, h = 0$ si et seulement si

$${}^{\alpha}\mathcal{L}^*\left(h + \frac{\alpha}{2 - n\alpha}\,\mathrm{Tr}\;hg\right) = 0.$$

□

Remarque 4.5.
• La composition de la trace et de $\mathcal{P}$ peut se réécrire simplement

$$\mathrm{Tr}\;\mathcal{P} = [(2\kappa(n-1)+1)\Delta - 2(1+\kappa n)\lambda]\,\mathrm{Tr} + (n-2)d^*\,\mathrm{div}\,.$$

• Comme précédemment avec $\alpha = 0$, si l'on désire caractériser l'image de ${}^{\alpha}\mathcal{P}$ sur une variété compacte sans bord, il sera pratique ici de décomposer un tenseurs symétrique en une partie dans l'image de ${}^{\alpha}\mathcal{L}$ et une dans le noyau de son adjoint.
• Lorsque $\alpha = 2$ et $n = 3$ un opérateur similaire à ${}^{2}\mathcal{P}$ est introduit dans [3]

5. Tenseurs TT

En dimension 3, sur les variétes conformément plates, le linéarisé du 2-tenseur de Cotton-York est opérateur différentiel d'ordre 3 qui transforme les tenseurs symétriques sans traces en tenseurs TT. Si M est simplement connexe à seconde cohomologie de De Rahm nulle, tous les tenseurs TT sont obtenus ainsi [2]. En dimension 4, l'opérateur d'ordre

4, adjoint du linéarisé du tenseurs de Bach joue un role similaire, de même que l'adjoint du linéarisé du tenseur d'Obstruction en dimension paire $n = 2m \geq 4$, l'opérateur sera alors d'ordre n.

Le théorème 1.1 montre que sur toute variéte d'Einstein de dimension $n \geq 3$, il existe un opérateur linéaire d'ordre 4 constructeur d'une grande partie des tenseurs TT (voir tous). Passons maintenant à la preuve de cette affirmation.

Démonstration. (du théorème 1.1) On pose $c = \frac{n}{n-1}$. Par les propriétés de commutation et de composition, on a

$$\text{div } P = \left[(\Delta_H - 2\lambda)(\Delta_H - c\lambda) - (dd^* + \frac{2}{c} d^*d - 2\lambda)(dd^* + \frac{c}{2} d^*d - c\lambda) \right] \text{div}$$

or comme $\Delta_H = dd^* + d^*d$ et que $d^2 = (d^*)^2 = 0$ on obtient immédiatement que le terme entre crochet est nul , ainsi div$P = 0$. De même par un calcul similaire ou simplement par dualité, on a $P\mathring{\mathcal{L}} = 0$.

Sur une variété riemannienne compacte sans bord et lisse, d'après [4], tout tenseur symétrique lisse sans trace $\mathring{h}$ se décompose en

$$\mathring{h} = \mathring{h}_{TT} + \mathring{\mathcal{L}}w,$$

avec $\mathring{h}_{TT}$ à divergence (et trace) nulle, la décomposition étant L^2-orthogonale. On a clairement

$$P\mathring{h} = P\mathring{h}_{TT} = (\Delta_L - 2\lambda)(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)\mathring{h}_{TT}$$

ainsi par l'alternative de Fredholm,

$$TT := \text{ ker div } \cap \text{ker Tr} = \text{Im } P_{|TT} \oplus \ker(\Delta_L - 2\lambda)(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)_{|TT},$$

la somme directe étant L^2 orthogonale, ou encore

$$TT := \text{Im } P \oplus \ker \left[(\Delta_L - 2\lambda)(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)_{|TT} \right].$$

Or on a

$$\ker \left[(\Delta_L - 2\lambda)(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)_{|TT} \right] = \ker(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT} + \ker(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)_{|TT},$$

en effet l'inclusion de droite à gauche est directe, pour l'autre sens il faut distinguer deux cas :
Si $\lambda = 0$ et $h \in \ker(\Delta_L)^2$, alors $\|\Delta_L h\|_{L^2}^2 = \langle (\Delta_L)^2 h, h \rangle_{L^2} = 0$, et si $\lambda \neq 0$, et $h \in \ker(\Delta_L - 2\lambda)(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)$ alors

$$h = \frac{n-1}{(2-n)\lambda} \left[(\Delta_L - 2\lambda)h - (\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)h \right] \in \ker(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda) \oplus \ker(\Delta_L - 2\lambda)$$

□

Remarque 5.1. Comme pour $\alpha \neq \frac{2}{n}$, on a

$$d^*d + \frac{c}{2}dd^* - 2\,\mathrm{Ric} = \mathrm{div}\,({}^{\frac{4-c}{2}}\mathcal{L}) = \frac{1}{2}({}^{\frac{c+2\alpha-4}{n\alpha-2}}\mathcal{L}^*)({}^{\alpha}\mathcal{L}),$$

on peut aussi écrire notre opérateur par exemple sous la forme

$$P = (\Delta_L - 2\lambda)(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda) - \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{L}}\left(\mathrm{div}\,({}^{\frac{3n-4}{2(n-1)}}\mathcal{L}) + (2 - \frac{n}{n-1})\lambda\right)\mathring{\mathcal{L}}^*.$$

Remarque 5.2. Sur une variété riemannienne compacte sans bord et lisse, on vérifie facilement que dans C^∞ par exemple

$$\mathrm{Ker}\;P = \ker(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT} + \ker(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)_{|TT} \oplus \mathrm{Im}\,\mathring{\mathcal{L}}.$$

Remarque 5.3. Si g est Ricci plate, alors en restriction aux tenseurs TT, on a

$$P = (\nabla^*\nabla)^2.$$

Sur une variété compacte sans bord, le noyau de ce dernier est réduit aux tenseurs parallèles. Dans certains cas comme sur les variétés à courbure constante, les 2-tenseurs symétriques parallèles sont les multiples de g donc nuls si leur trace l'est, ainsi le noyau est trivial et tous les tenseurs TT sont dans l'image de P, on peut ainsi traiter les cas exclut par [2] en dimension 3 mais aussi les dimensions supérieures.

Lorsque P agit sur les tenseurs TT, on remarque que c'est (4 fois) la composée des version linéaire des tenseurs de Schouten et de Ricci sans trace. Nous allons vérifier que c'est aussi le cas lorsqu'il agit sur tous les tenseurs sans trace (modulo adjoint).

PROPOSITION 5.4. *Sur une variété d'Einstein telle que Ric$(g) = \lambda g$, on a*

$$P = 4\,D\,\mathrm{Sch}(g)^*\,D\mathring{\mathrm{Ric}}(g)^*.$$

Démonstration. On rappelle que si $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$ alors

$$D\,\mathrm{Sch}(g)h = \frac{1}{2}\left(\Delta_L h - \frac{n\lambda}{n-1}h\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}\mathcal{B}h - \frac{D\mathrm{R}(g)h}{2(n-1)}g,$$

a pour adjoint

$$D\,\mathrm{Sch}(g)^*h = \frac{1}{2}\left(\Delta_L h - \frac{n\lambda}{n-1}h\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}^*\,\mathrm{div}\,h - \frac{1}{2(n-1)}D\mathrm{R}(g)^*\,\mathrm{Tr}\,h,$$

et

$$D\mathring{\mathrm{Ric}}(g)h = \frac{1}{2}\left(\Delta_L h - 2\lambda h\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}\mathcal{B}h - \frac{D\mathrm{R}(g)h}{n}g,$$

a pour adjoint

$$D\mathring{\mathrm{Ric}}(g)^*h = \frac{1}{2}\left(\Delta_L h - 2\lambda h\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}^*\,\mathrm{div}\,h - \frac{1}{n}D\mathrm{R}(g)^*\,\mathrm{Tr}\,h$$

La composée, agissant sur les tenseurs sans trace est, en posant $c = \frac{n}{n-1}$, et puisque div $D\mathring{\mathrm{Ric}}(g)^* = 0$:

$$4\,D\,\mathrm{Sch}(g)^*\,D\mathring{\mathrm{Ric}}(g)^* = [(\Delta_L - c\lambda) - \frac{c}{n} D\mathrm{R}(g)^*\,\mathrm{Tr}][(\Delta_L - 2\lambda) - \mathcal{B}^*\,\mathrm{div}].$$

Cette dernière quantité est égale à la somme des termes suivants :

$$\begin{aligned}
(I) &= (\Delta_L - c\lambda)(\Delta_L - 2\lambda),\\
(II) &= -(\Delta_L - c\lambda)\mathcal{B}^*\,\mathrm{div} = -\mathcal{B}^*(\Delta_H - c\lambda)\,\mathrm{div},\\
(III) &= -\frac{c}{n} D\mathrm{R}(g)^*\,\mathrm{Tr}(\Delta_L - 2\lambda) = -\frac{c}{n} D\mathrm{R}(g)^*(\Delta - 2\lambda)\,\mathrm{Tr} = 0\\
(IV) &= \frac{c}{n} D\mathrm{R}(g)^*\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{B}^*\,\mathrm{div} = \frac{c(n-2)}{n} D\mathrm{R}(g)^* d^*\,\mathrm{div}\\
&= \frac{c(n-2)}{2n}[\mathcal{B}^* d + (\Delta - 2\lambda)(.)g]d^*\,\mathrm{div}\,.
\end{aligned}$$

Or on a

$$(II)+(IV) = -\mathcal{B}^*(\Delta_H - \frac{c(n-2)}{2n} dd^* - c\lambda)\,\mathrm{div} + \frac{c(n-2)}{2n}[(\Delta - 2\lambda)(.)g]d^*\,\mathrm{div}\,.$$

Comme $\mathcal{B}^* = \mathring{\mathcal{L}} + (1 - \frac{2}{n})d^*(.)g$ et

$$\Delta_H - \frac{c(n-2)}{2n} dd^* - c\lambda = d^*d + \frac{n}{2(n-1)} dd^* - \frac{n\lambda}{n-1},$$

dont la divergence vaut

$$\frac{n}{2(n-1)}\Delta d^* - \frac{n\lambda}{n-1} d^* = \frac{n}{2(n-1)}(\Delta - 2\lambda)d^*,$$

il en résulte

$$(II) + (IV) = -\mathring{\mathcal{L}}(d^*d + \frac{n}{2(n-1)} dd^* - \frac{n\lambda}{n-1})\,\mathrm{div}\,.$$

Finalement, on a bien $(I) + (II) + (III) + (IV) = P$. □

Comme $\mathcal{P}$ envoie les 2-tenseurs symétriques sans traces (ou avec) en tenseurs à divergence nulle, on peut aussi chercher un opérateur $\mathcal{Q}$ envoyant les tenseurs symétriques à divergence nulle en tenseurs TT, la composée $\mathcal{QP}$ aura les propriétés recherchées. L'opérateur suivant répond à cette problématique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}h :&= \left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)\left(h - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,h\,g\right) - \frac{1}{2(n-1)}\mathring{\mathcal{L}} d\,\mathrm{Tr}\,h\\
&= \left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)\left(h - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,h\,g\right) - \frac{1}{n-1}\mathring{\mathrm{Hess}}\;\mathrm{Tr}\,h,
\end{aligned}$$

$\mathring{\mathrm{Hess}}$ désignant la partie sans trace de la hessienne. On peut vérifier que

$$\mathcal{Q}_{|\ker\,\mathrm{div}} = D\,\mathrm{Sch}(g)^*_{|\ker\,\mathrm{div}}\,.$$

Proposition 5.5. *Sur une variété d'Einstein telle que Ric(g) = λg, on a*

$$\mathcal{Q}(\ker \operatorname{div}) \subset \ker \operatorname{div} \cap \ker \operatorname{Tr},$$

de plus

$$P = \mathcal{Q}\mathcal{P}.$$

6. Détours non-linéaires

L'opérateur P étant (4 fois) la composée des adjoints des linéarisés de Sch et $\mathring{\mathrm{Ric}}$ en une métrique d'Einstein, on aimerait le retrouver par linéaristion d'un opérateur non-linéaire "naturel". On peut commencer par l'opérateur hautement non-linéaire

$$\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch} := \mathring{\mathrm{Ric}} \circ \mathrm{Sch},$$

qui a bien un sens au voisinage d'une métrique d'Einstein avec $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$ si $\lambda \neq 0$ ce que nous supposerons désormais. D'une part pour tout difféomorphisme ϕ, on a

$$\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(\phi^* g) = \mathring{\mathrm{Ric}}(\phi^*\,\mathrm{Sch}(g)) = \phi^*\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(g) = 0,$$

puisque $\mathrm{Sch}(g) = \frac{(n-2)\lambda}{2(n-1)} g$ est d'Einstein, ce qui implique

$$D\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(g)\,\mathcal{L} = 0,$$

ou la version duale :

$$\operatorname{div}\,[D\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(g)]^* = 0.$$

D'autre part comme pour tout t réel et toute fonction f, on a

$$\mathrm{Sch}(e^{tf} g) = \mathrm{Sch}(g) - \frac{n-2}{2} t\nabla\nabla f + \frac{n-2}{4} t^2 df\, df - \frac{n-2}{8} |df|_g^2 t^2 g,$$

alors

$$\mathrm{Sch}(e^{tf} g) = \mathrm{Sch}(g) - \frac{n-2}{2} t\nabla\nabla f + O(t^2) = \frac{(n-2)\lambda}{2(n-1)} \left(g - \frac{(n-1)}{\lambda} t\nabla\nabla f + O(t^2) \right).$$

Si l'on note ϕ_t le flot local associé au champ de vecteur $X = -\frac{(n-1)}{\lambda}\nabla f$, il en découle

$$\mathrm{Sch}(e^{tf} g) = \phi_t^*\,\mathrm{Sch}(g) + O(t^2),$$

ainsi

$$\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(e^{tf} g) = O(t^2),$$

finalement la dérivée relativement à t en $t = 0$, donne pour toute fonction f

$$D\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(g)(fg) = 0.$$

La version duale de cette dernière égalitée étant :

$$\mathrm{Tr}\,[D\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(g)]^* = 0.$$

En conclusion, l'opérateur $\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}$ ayant les propriétés recherchées des tenseurs de Bach ou d'Obstruction, mais en version infinitésimale, on comprend que l'adjoint de son linéarisé envoie aussi les tenseurs symétriques sans trace sur des tenseurs TT.

Remarque 6.1. Comme g est d'Einstein, pour tout réel t proche de zéro, on a $\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}(g+tg)=0$ ainsi on remarque que P^* est aussi (à une constante multiplicative près) la linéarisation de l'opérateur "moins" non-linéaire $g \mapsto (D\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}(g)\,\mathrm{Sch}(g))$ qui lui est bien définit pour toute métrique.

Remarque 6.2. Des opérateurs d'ordres 4 semblables à P apparaissent aussi dans les problèmes de stabilité de points critiques de fonctionnelles quadratiques en la courbure. Compte tenu du théorème 3.10 de [12] (avec convention opposée de signe pour Δ_L) on peut remarquer que P^* et la variation seconde de $2\tilde{\mathcal{F}}_\tau$ de [12] avec $\tau = \frac{4-3n}{n(n-1)}$ coïncident sur les tenseurs TT, mais nous n'avons pas poussé plus loin la comparaison.

Références

[1] A. Besse, Einstein manifolds, *Springer-Verlag* (1987).

[2] R. Beig, TT-tensors and conformally flat structures on 3-manifolds. Mathematics of gravitation, Part I (Warsaw, 1996), 109-118, Banach Center Publ., 41, Part I, *Polish Acad. Sci. Inst. Math.*, Warsaw, 1997.

[3] R. Beig and P. T. Chruściel, On linearised vacuum constraint equations on Einstein manifolds, *Classical and Quantum Gravity*, vol. 37, n^0 21, (2020).

[4] M. Berger and D. Ebin, Some decompositions of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold, *Jour. Diff. Geom.* 3 (1969) 379-392.

[5] J.P. Bourguignon, D. G. Elbin and J. E. Marsden , Sur le noyau des opérateurs pseudo-differentiels á symbole surjctif et non injectif, *C. R. Acad. Sci., Paris,* 282, (1976), 867-870 .

[6] J. Corvino, On the existene and stability of the Penrose compactification,*Ann. Henri Poincaré*, **8** ,no. 3,(2007), 597-620.

[7] X. Dai, X. Wang and G. Wei , On the stability of Riemannian manifold with parallel spinors, *Invent. math.* 161, (2005), 151-176 .

[8] E. Delay, Smooth compactly supported solutions of some underdetermined elliptic PDE, with gluing applications , *Comm. PDE*, Vol. 37, no. 10 (2012), p. 1689-1716.

[9] E.Delay, Inversion d'opérateurs de courbures au voisinage d'une métrique Ricci parallèle , *Annales de l'institut Fourier*, Vol. 67, no. 2 (2017), p. 521-538.

[10] S. Dain and H. Friedrich, Asymptotically Flat initial data with prescribed regularity at infinity, *Comm. Math. Phys.*, **222**,, no. 3 (2001), 569-609.

[11] R. Gicquaud, Linearization stability of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold, *Jour. Math. Phys.*, **51**, 072501, (2010).

[12] M. J. Gursky and J. A. Viaclovsky, Rigidity and stability of Einstein metrics for quadratic curvature functionals,*Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, vol. 2015, no. 700, (2015), pp. 37-91.

[13] N. Koiso, Non-deformability of Einstein metrics, *Osaka J. Math.* **15** (1978), 419-433.

[14] K. Kröncke, Variational Stability and Rigidity of Compact Einstein Manifolds, *Quantum Math. Phys.* (2016) pp 497-513.

[15] A. Lichnerowicz, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, *Publications Mathématiques de l'IHES*, Tome 10 (1961), pp. 5-56.

[16] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan* Vol. 14, No. 3, (1962), 333-340.

Avignon Université – Laboratoire de mathématiques d'Avignon – F-84 916 AVIGNON

Aix Marseille Université – F.R.U.M.A.M.- CNRS– F-13331 MARSEILLE
Email address: erwann.delay@univ-avignon.fr