LE LAPLACIEN CONFORME SUR LES 2-TENSEURS SYMÉTRIQUES

ERWANN DELAY

Résumé. Sur toute variété riemannienne, on explicite le Laplacien covariant conforme, agissant sur tous les (champs de) tenseurs covariants symétriques d'ordre deux. Ce dernier étant jusqu'à présent exprimé uniquement sur les variétés d'Einstein et agissant simplement sur les 2-tenseurs sans trace et à divergence nulle (tenseurs TT).

Abstract. On any riemannian manifold, we explicit the conformally covariant Laplacian, acting on all (fields of) covariant symmetric tensor of order two. The latter being so far expressed only on Einstein manifold and acting simply on 2-tensors without trace and with zero divergence (TT-tensors).

Mots clefs : Laplacien de Lichnerowicz, tenseurs symétriques, covariant conforme.

Keywords : Lichnerowicz Laplacian, symmetric tensors, conformally covariant.

2020 MSC : 53C18, 58J70, 35J47.

Table des matières

Date: 4 Avril 2023.

1. Introduction

En géométrie Riemannienne, comme en relativité générale, les champs de 2-tenseurs covariants symétriques apparaissent naturellement dès que l'on étudie des variations de métriques. Certains opérateurs d'ordre deux, agissant sur ces tenseurs ont aussi leur importance, comme le Laplacien de Lichnerowicz qui se dévoile lors de la linéarisation de la courbure de Ricci.

On s'intéresse ici à la construction explicite d'un tel opérateur, elliptique si possible, d'ordre 2, agissant sur les tenseurs symétriques, ayant de plus la propriété d'être covariant conforme (voir par exemple l'appendice 7.2 de [3] pour une définition).

Il faut savoir qu'il était connu qu'un tel opérateur existait [7, 8] mais, hormis pour les métriques d'Einstein et agissant sur les tenseurs de trace nulle et à divergence nulle (dit TT-tensors) sa forme générale ne semble pas avoir été décrite auparavant.

Par ailleurs les opérateurs covariants conformes sont bien entendu d'une importance fondamentale en géométrie conforme. On rappelle en particulier le Laplacien conforme de Yamabe agissant sur les fonctions :

$$\Delta_Y = d^*d + \frac{n-2}{4(n-1)}R,$$

R désignant la courbure scalaire, d la différentielle extérieure sur les formes différentielles et d^* son adjoint .

Par analogie, Branson et Gover [9] construisent (parmis d'autres) l'opérateur suivant agissant sur les (champs de) 1-formes (voir par exemple l'opérateur $2L_1^1$ dans [6] proposition 8.5)

$$L_{BG} = d^*d + \frac{n-4}{n}dd^* + \frac{n-4}{4(n-2)}R - \frac{n-4}{(n-2)}\operatorname{Ric},$$

Ric étant l'opérateur de Ricci. L_{BG} est elliptique dès lors que $n \neq 4$.

Le but de cette note est donc d'expliciter un opérateur similaire agissant sur les champs de deux formes bilinéaires symétriques.

Afin de décrire notre résultat, quelques définitions s'imposent. Tout d'abord, Δ_L désignera le Laplacien de Lichnerowicz, $\mathring{\mathcal{L}}$ l'opérateur de Killing conforme, div la divergence sur les 2-tenseurs, enfin Ric l'opérateur de Ricci, et R la courbure scalaire (les définitions précises des opérateurs sont données en section 2, notamment les normalisations et conventions de signe). Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1.1. *Sur une variété riemannienne lisse (M, g) de dimension $n \geq 3$, l'opérateur autoadjoint*

$$P_g = \Delta_L - \frac{8}{n+2}\mathring{\mathcal{L}}\operatorname{div} - 2\operatorname{Ric} + \frac{2}{n}\langle \operatorname{Ric}(g), .\rangle\, g + \frac{n-2}{4(n-1)}R$$

agissant sur les tenseurs symétriques de trace nulle est covariant conforme : $\forall v \in C^\infty(M)$, $\forall u \in C^\infty(M, \mathring{\mathcal{S}}_2)$,

$$P_{e^{2v}g}(u) = e^{-\frac{n-2}{2}v} P_g(e^{\frac{n-6}{2}v} u).$$

On notera deux dimensions particulières, $n = 4$ seule dimension où P_g n'est pas elliptique et $n = 6$ où le noyau de P_g est un espace invariant conforme.

L'opérateur donné ici agit sur les tenseurs symétriques sans traces mais il est facile d'en déduire un opérateur agissant sur tous les 2-tenseurs symétriques, ce dernier est donné au corollaire 3.7.

La preuve du Théorème 1.1 est directe, en analysant les transformations conformes sur chacun des opérateurs qui apparaissent dans P_g, afin de vérifier que la combinaison donnant P_g convient. L'utilité de cette preuve est aussi l'obtention d'une série de formules de transformations conformes sur des opérateurs naturels, chacune ayant son intérêt propre pour de futures références.

Une autre preuve, basée sur une adaptation de [6] aux 2-tenseurs symétriques, permet de retrouver les opérateurs de [8], ainsi que d'autres, et les liens qui les unissent [5].

Notons que

$$\Delta_E := \Delta_L - 2\,\mathrm{Ric} = \Delta - 2\,\mathrm{Riem},$$

lorsqu'il est restreint aux tenseurs TT (càd à divergence et trace nulle), est l'opérateur apparaissant dans l'étude de stabilité des métriques d'Einstein.

Notons aussi que la transformation $u \mapsto e^{\frac{n-6}{2}v} u$ n'est pas celle qui permet de passer des tenseurs TT pour $e^{2v}g$ aux tenseurs TT pour g (qui est $u \mapsto e^{(n-2)v} u$ voir lemme 3.3) d'où l'intérêt du calcul du terme explicite en divergence dans P_g.

2. Définitions, notations et conventions

Nous décrivons ici certains objets utilisés dans cette note. Tout d'abord, (M, g) désignera une variété riemannienne , et ∇ sa connexion de Levi-Civita .

On notera $\mathcal{T}_r^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang r et contravariants de rang q. Si $q = 0$, on notera $\mathcal{S}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques et $\mathring{\mathcal{S}}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques de trace nulle (relativement à g). On appliquera la convention de sommation, en utilisant g_{ij} et son inverse g^{ij} afin d'abaisser ou de remonter les indices.

L^2 est l'espace de Hilbert usuel de fonctions ou tenseurs muni du produit (resp. norme)

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_M \langle u, v\rangle_g dV_g \text{ (resp. } |u|_{L^2} = (\int_M |u|_g^2 dV_g)^{\frac{1}{2}}),$$

où $\langle u, v\rangle_g$ (resp. $|u|_g$) est le produit usuel (resp. norme) de fonctions ou tenseurs relatif à g, et la mesure dV_g celle induite par g.

On note d la différentielle extérieure agissant sur les formes différentielles, d^* son adjoint formel (pour $L^2(dV_g)$). Le Laplacien sur les fonctions est définit par

$$\Delta = \nabla^*\nabla = -\operatorname{Tr}\nabla^2 = d^*d,$$

où ∇^* est l'adjoint formel de ∇ . Pour les 1-formes on notera de plus

$$\Delta_H = d^*d + dd^* = \nabla^*\nabla + \operatorname{Ric}, \tag{2.1}$$

le Laplacien de Hodge correspondant (la deuxième égalité étant une identité de Weitzenböck classique sur les 1-formes).

La divergence d'un 2-tenseur symétrique est donnée par :

$$(\operatorname{div} h)_i = -\nabla^j h_{ij}.$$

L'opérateur de Killing sera noté

$$(\mathcal{L}X)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i)\ ,\ \ \mathcal{L}^* = \operatorname{div}.$$

L'opérateur de Ahlfors ou de Killing conforme étant alors :

$$\mathring{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{1}{n}d^*(.)g\ ,\ \ \mathring{\mathcal{L}}^* = \operatorname{div} + \frac{1}{n}d\operatorname{Tr},$$

ce dernier donnant lieu au Laplacien dit vectoriel (en utilisant l'identité de Weitzenböck (2.1)) : [1]

$$\begin{aligned} 2\operatorname{div}\mathring{\mathcal{L}} &= \nabla^*\nabla - \operatorname{Ric}(g) + \tfrac{n-2}{n}dd^* \\ &= \Delta_{\mathrm{H}} - 2\operatorname{Ric}(g) + \frac{n-2}{n}dd^* \\ &= d^*d + 2\frac{n-1}{n}dd^* - 2\operatorname{Ric}(g). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le Laplacien de Lichnerowicz [12] est définit en coordonnés locales par

$$\Delta_L h_{ij} = -\nabla^k\nabla_k h_{ij} + R_{ik}h^k_j + R_{jk}h^k_j - 2R_{ikjl}h^{kl},$$

où R_{ij} est la curbure de Ricci de g et R_{ijkl} sa courbure de Riemann. De manière condensée, on écrira aussi

$$\Delta_L = \Delta + 2(\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem}).$$

Le tenseur de Schouten et définit par

$$\operatorname{Sch}(g) = \frac{1}{n-2}\left(\operatorname{Ric}(g) - \frac{1}{2(n-1)}R(g)g\right).$$

La dérivée covariante dans la direction d'un champ V d'un 2-tenseur u sera notée

$$(\nabla_V u)_{ij} := V^k\nabla_k u_{ij},$$

1. Profitons de cette note pour signaler que la formule correspondante de [3] appendice 7.1 (alors heureusement non utilisée) doit etre corrigée comme ici.

on notera aussi

$$(\nabla u_V)_{ij} := V^k \nabla_i u_{kj}.$$

Pour un 2-tenseur covariant T, on considère sa partie symétrique

$$S(T)_{ij} := \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}),$$

et sa partie symétrique sans trace

$$\mathring{S}(T) := S(T) - \frac{1}{n} \operatorname{Tr} S(T) g.$$

Pour A et B deux 2-tenseurs on écrira

$$(A \circ B)_{ij} := A_i^k B_{kj}.$$

Notons que

$$(dv \otimes dv) \circ u = dv \otimes u(\nabla v),$$

et que

$$\mathring{S}(\nabla w) = \mathring{\mathcal{L}} w.$$

3. Opérateurs et transformation conforme

Cette section prouve le Théorème 1.1 en analysant la transformation de chacun des termes que définissent P_g pour une métrique conforme. On commence par rappeler comment se comportent les courbures [1].

Proposition 3.1. *Considérons deux métriques conformes $g' = e^{2v} g$. Alors les symboles de Christoffel vérifient*

$$\Gamma'^k_{ij} - \Gamma^k_{ij} = (\delta^k_j \partial_i v + \delta^k_i \partial_j v - g_{ij} \nabla^k v).$$

Les courbures de Riemann sont reliées via

$$R'_{ijkl} = e^{2v}[R_{ijkl} - (g_{ij}\mathcal{S}_{jl} + g_{jl}\mathcal{S}_{ik} - g_{il}\mathcal{S}_{jk} - g_{jk}\mathcal{S}_{il})],$$

où

$$\mathcal{S}_{ij} = \nabla_i \nabla_j v - \nabla_i f \nabla_j v + \frac{1}{2}|dv|^2 g_{ij},$$

que l'on peut réécrire avec le produit de Kulkarni-Numizu (voir [1])

$$R'_{ijkl} = e^{2v}[R_{ijkl} - (g \owedge \mathcal{S})_{ijkl}].$$

Les courbures de Ricci respectives satisfont

$$R'_{ij} = R_{ij} - (n-2)\nabla_i \nabla_j v + (n-2)\nabla_i v \nabla_j v - (\nabla^k \nabla_k v + (n-2)|dv|^2) g_{ij}.$$

Pour les courbures de Schouten on a

$$S'_{ij} = S_{ij} - \nabla_i \nabla_j v + (dv \otimes dv)_{ij} - \frac{1}{2}|dv|^2_g g_{ij} = S_{ij} - \mathcal{S}_{ij}.$$

Enfin les courbures scalaires respectives vérifient

$$R' = e^{-2v}[R - 2(n-1)\nabla^i \nabla_i v - (n-1)(n-2)\nabla^i f \nabla_i v].$$

Énonçons maintenant la transformation du Laplacien brut sur les deux tenseurs symétriques .

PROPOSITION 3.2. *Considérons deux métriques conformes $g' = e^{2v}g$, un 2-tenseur symétrique u et $h = e^{cv}u$ avec $c \in \mathbb{R}$, on a alors*

$$\begin{aligned}-\Delta' u &= e^{(-c-2)v}\{-\Delta h + (n-6-2c)\nabla_{\nabla v} h + 4S(dv \otimes \operatorname{div} h) + 4S(\nabla h_{\nabla v})\\ &\quad +[(2(3-n) - c(n-6) + c^2)|dv|_g^2 + (2+c)\Delta v]h\\ &\quad -(2n+4c-4c)S(dv \otimes h(\nabla v))\\ &\quad +2\operatorname{Tr}_g h\, dv \otimes dv + 2h(\nabla v, \nabla v)g\}\end{aligned}$$

Démonstration. Par un calcul long et fastidieux, on trouve que sur les deux tenseurs symétriques :

$$\begin{aligned}\nabla'^k\nabla'_k u_{ij} &= e^{-2v}\big[\nabla^k\nabla_k u_{ij} + (n-6)\nabla^k v\nabla_k u_{ij} - 2(\nabla_i v\nabla^k u_{kj} + \nabla_j v\nabla^k u_{ki})\\ &\quad +2(\nabla^k v\nabla_i u_{kj} + \nabla^k v\nabla_j u_{ki}) + (2(3-n)\nabla^k v\nabla_k v - 2\nabla^k\nabla_k v)u_{ij}\\ &\quad -n(\nabla_i v\nabla^k v u_{kj} + \nabla_j v\nabla^k v u_{ki}) + 2\nabla_i v\nabla_j v u^k_k + 2g_{ij}u_{kl}\nabla^k v\nabla^l v\big]\,.\end{aligned}$$

On peut réécrire cette égalité de façons plus condensée en

$$\begin{aligned}-\Delta' u &= e^{-2v}\{-\Delta u + (n-6)\nabla_{\nabla v} u + 4S(dv \otimes \operatorname{div} u) + 4S(\nabla u_{\nabla v})\\ &\quad +[2(3-n)|dv|_g^2 + 2\Delta v]u \ - 2nS(dv \otimes u(\nabla v))\\ &\quad +2\operatorname{Tr}_g u\, dv \otimes dv + 2u(\nabla v, \nabla v)g\}\,.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Maintenant comme $h = e^{cv}u$, on calcule les termes qui apparaissent au membre de droite

$$\nabla u = e^{-cv}(-c\, dv \otimes h + \nabla h),$$
$$\nabla u_{\nabla v} = e^{-cv}(-c\, dv \otimes h(\nabla v) + \nabla h_{\nabla v}),$$
$$\nabla_{\nabla v} u = e^{-cv}(-c|dv|^2 h + \nabla_{\nabla v} h),$$
$$\operatorname{div} u = e^{-cv}(c\, h(\nabla v) + \operatorname{div} h),$$

enfin

$$-\Delta u = e^{-cv}[-\Delta h - 2c\nabla_{\nabla v} h + (c^2|dv|^2 + c\Delta v)h].$$

Il suffit ensuite de remplacer les termes ci-avant dans (3.1)

□

LEMME 3.3. *Considérons deux métriques conformes $g' = e^{2v}g$, un 2-tenseur symétrique sans trace u et $h = e^{cv}u$ avec $c \in \mathbb{R}$. On a alors*

$$\operatorname{div}' u = e^{(-c-2)v}[\operatorname{div} h + (c-(n-2))h(\nabla v)],$$

en particulier div *est covariant conforme :*

$$\operatorname{div}' u = e^{-nv}\operatorname{div}(e^{(n-2)v}u).$$

Démonstration. Par un calcul direct on retrouve le résultat bien connu

$$\operatorname{div}' u = e^{-2v}[\operatorname{div} u - (n-2)u(\nabla v) + \operatorname{Tr}_g u\, dv],$$

ainsi, si $\operatorname{Tr}_g u = 0$

$$\operatorname{div}' u = e^{-2v}[\operatorname{div} u - (n-2)u(\nabla v)].$$

Finalement on obtient

$$\operatorname{div}' u = e^{(-c-2)v}[\operatorname{div} h + (c-(n-2))h(\nabla v)]$$

□

Remarque 3.4. Par dualité ou un calcul direct, on retrouve aussi la formule classique de covariance conforme :

$$\mathring{\mathcal{L}}_{g'}\omega = e^{2v}\mathring{\mathcal{L}}_g(e^{-2v}\omega).$$

PROPOSITION 3.5. *Considérons deux métriques conformes $g' = e^{2v}g$, un 2-tenseur symétrique sans trace u et $h = e^{cv}u$. Alors on a la correspondance*

$$\begin{aligned}
\mathring{\mathcal{L}}'(\operatorname{div}' u) \quad = \quad & e^{(-c-2)v}\Big\{\mathring{\mathcal{L}}(\operatorname{div} h) \\
& +(c-(n-2))(\nabla h_{\nabla v} + S(\nabla\nabla v \circ h)) \\
& (-c-4)S(dv \otimes \operatorname{div} h) \\
& +(-c-4)(c-(n-2))S(dv \otimes h(\nabla v)) \\
& +\frac{1}{n}\big[(2c-n+6)\operatorname{div} h(\nabla v) \\
& +(c-(n-2))(c+4)h(\nabla v, \nabla v) \\
& -(c-(n-2))\langle\nabla\nabla v \circ h\rangle\big]g\Big\}
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour toute 1-forme w, on a

$$\nabla' w = \nabla w - 2S(dv \otimes w) + w(\nabla v)g,$$

en particulier si $w = \operatorname{div}' u$, par le Lemme 3.3, il en découle

$$\begin{aligned}
\nabla' \operatorname{div}' u \quad = \quad & e^{(-c-2)v}\{(-c-2)dv \otimes [\operatorname{div} h + (c-(n-2))h(\nabla v)] \\
& +\nabla \operatorname{div} h + (c-(n-2))(\nabla h_{\nabla v} + \nabla\nabla v \circ h) \\
& -2S(dv \otimes \operatorname{div} h) - 2(c-(n-2))S(dv \otimes h(\nabla v)) \\
& +[\operatorname{div} h(\nabla v) + (c-(n-2))h(\nabla v, \nabla v)]g\}\,.
\end{aligned}$$

La partie symétrique de $\nabla' \operatorname{div}' u$ est donc

$$\begin{aligned}
S(\nabla' \operatorname{div}' u) \quad = \quad & e^{(-c-2)v}\{S(\nabla \operatorname{div} h) + (c-(n-2))(\nabla h_{\nabla v} + S(\nabla\nabla v \circ h)) \\
& (-c-4)S(dv \otimes \operatorname{div} h) + (-c-4)(c-(n-2))S(dv \otimes h(\nabla v)) \\
& +[\operatorname{div} h(\nabla v) + (c-(n-2))h(\nabla v, \nabla v)]g\}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit la trace

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_g S(\nabla' \operatorname{div}' u) \quad = \quad & e^{(-c-2)v}\{-d^* \operatorname{div} h + (c-(n-2))\langle\nabla\nabla v \circ h\rangle \\
& +(-2c+2n-6)\operatorname{div} h(\nabla v) \\
& +(c-(n-2))(n-c-4)h(\nabla v, \nabla v)\}\,.
\end{aligned}$$

Finalement la partie symétrique sans trace de $\nabla' \operatorname{div}' u$ est

$$\begin{aligned}\mathring{S}(\nabla' \operatorname{div}' u) \quad = \quad & e^{(-c-2)v}\{S(\nabla \operatorname{div} h)\\ & +(c-(n-2))(\nabla h_{\nabla v} + S(\nabla\nabla v \circ h))\\ & (-c-4)S(dv \otimes \operatorname{div} h)\\ & +(-c-4)(c-(n-2))S(dv \otimes h(\nabla v))\\ & +\frac{1}{n}\big[(2c-n+6) \operatorname{div} h(\nabla v)\\ & +(c-(n-2))(c+4)h(\nabla v, \nabla v)\\ & +d^* \operatorname{div} h - (c-(n-2))\langle \nabla\nabla v \circ h\rangle\big]g\big\}\,.\end{aligned}$$

On conclut en rappelant que

$$S(\nabla \operatorname{div} h) + \frac{1}{n}(d^* \operatorname{div} h)g = \mathring{S}(\nabla \operatorname{div} h) = \mathring{\mathcal{L}} \operatorname{div} h.$$

□

Il nous reste à énoncer la transformation de l'action des opérateurs de courbures.

Proposition 3.6. *Considérons deux métriques conformes $g' = e^{2v}g$, un 2-tenseur symétrique u et $h = e^{cv}u$, avec $c \in \mathbb{R}$. L'action des termes de courbures sont alors reliés par*[2]

$$\operatorname{Riem}' u = e^{(-c-2)v}[\operatorname{Riem} h - \langle \mathcal{S}, h\rangle g + 2S(\mathcal{S} \circ h)],$$

$$\operatorname{Ric}' u = e^{(-c-2)v}\left[\operatorname{Ric} h - (n-2)S(\mathcal{S} \circ h) + \left(\Delta v - \frac{n-2}{2}|dv|^2\right) g\right],$$

$$\langle \operatorname{Ric}(g'), u\rangle_{g'} g' = e^{(-c-2)v}[\langle \operatorname{Ric}(g), h\rangle_g - (n-2)\langle \mathcal{S}, h\rangle_g]g,$$

et

$$R' u = e^{(-c-2)v}[R + 2(n-1)\Delta v - (n-2)(n-1)|dv|^2]h$$

Démonstration. Cela découle immédiatement de la Proposition 3.1. □

Nous pouvons maintenant passer à la justification du résultat principal.

Démonstration du Théorème 1.1. On considère deux métriques conformes $g' = e^{2v}g$ pour une fonction v. Soit u un deux tenseur symétrique sans trace et $h = e^{cv}u$, avec $c \in \mathbb{R}$. En utilisant les trois propositions, 3.2, 3.5 et 3.6, on remarque que pour $c = \frac{n-6}{2}$ la combinaison

$$P_{g'} u := \Delta' u - \frac{8}{n+2}\mathring{\mathcal{L}}' \operatorname{div}' u - 2\operatorname{Riem}' u + \frac{2}{n}\langle \operatorname{Ric}'(g), u\rangle\, g' + \frac{n-2}{4(n-1)} R' u$$

donne

$$P_{g'} u = e^{(-c-2)v}\left\{\Delta h - \frac{8}{n+2}\mathring{\mathcal{L}} \operatorname{div} h - 2\operatorname{Riem} h + \frac{2}{n}\langle \operatorname{Ric}(g), h\rangle\, g + \frac{n-2}{4(n-1)} R h\right\}.$$

2. L'action $u \mapsto \operatorname{Ric} u$ est indiquée par complétude mais n'est pas utilisée dans ce texte

On a donc bien
$$P_{g'}u = e^{(-c-2)v} P_g h.$$
$\square$

Le Théorème 1.1 concerne les tenseurs symétriques sans trace, si l'on cherche un opérateur agissant sur les tous les tenseurs symétriques on peut ajouter la partie conforme comme suit. Pour le Laplacien conforme de Yamabe, on a pour toute fonction lisse φ
$$\Delta'_Y \varphi = e^{-\frac{n+2}{2}v} \Delta_Y (e^{\frac{n-2}{2}v} \varphi),$$
ainsi comme $\Delta_L(\varphi g) = (\Delta\varphi)\, g$, on déduit
$$\left(\Delta'_L + \frac{n-2}{4(n-1)} R'\right)(\varphi g') = e^{-\frac{n-2}{2}v} \left(\Delta_L + \frac{n-2}{4(n-1)} R\right)(e^{\frac{n-6}{2}v} \varphi g').$$
Afin de décrire notre opérateur, introduisons une dernière notation. Pour un deux tenseur symétrique h, on note $\mathrm{TF}\, h$ sa partie sans trace :
$$h = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} h\, g + \mathrm{TF}\, h.$$
En combinant ce qui précède et le Théorème 1.1 on obtient directement le corollaire suivant.

Corollaire 3.7. *Sur une variété riemannienne lisse (M, g) de dimension $n \geq 3$, l'opérateur autoadjoint*
$$\mathcal{P}_g = \Delta_L - \frac{8}{n+2} \mathring{\mathcal{L}} \operatorname{div} \mathrm{TF} - 2\mathrm{Ric}\, \mathrm{TF} + \frac{2}{n} \langle \mathrm{Ric}(g), \mathrm{TF}\, . \rangle\, g + \frac{n-2}{4(n-1)} R$$
agissant sur les 2-tenseurs symétriques est covariant conforme :
$\forall v \in C^\infty(M)$, $\forall u \in C^\infty(M, \mathcal{S}_2)$,
$$\mathcal{P}_{e^{2v}g}(u) = e^{-\frac{n-2}{2}v} \mathcal{P}_g (e^{\frac{n-6}{2}v} u).$$

4. Ellipticité

Proposition 4.1. *P_g est elliptique si et seulement si la dimension est différente de 4.*

Démonstration. Le symbole principal de P_g est donné par l'endomorphisme de $\mathring{\mathcal{S}}_2$:
$$\sigma_\xi h = -|\xi|^2 h + \frac{4}{n+2} (\xi \otimes h(\xi) + h(\xi) \otimes \xi - \frac{2}{n} h(\xi,\xi) g),$$
où le covecteur ξ est (abusivement) identifié avec le vecteur correspondant via g. Si $\xi \neq 0$ et $\sigma_\xi h = 0$ alors on déduit
$$\sigma_\xi h(\xi) = -|\xi|^2 h(\xi) + \frac{4}{n+2} \left[|\xi|^2 h(\xi) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) h(\xi,\xi)\xi \right] = 0$$
et
$$\sigma_\xi h(\xi,\xi) = \left[-1 + \frac{4}{n+2} \left(2 - \frac{2}{n}\right) \right] h(\xi,\xi) |\xi|^2 = 0$$

donc

$$\sigma_\xi h(\xi,\xi) = -\frac{(n-2)(n-4)}{n(n+2)} h(\xi,\xi)|\xi|^2 = 0.$$

Ainsi si $n \neq 4$ (on rappelle que $n \geq 3$), on obtient $h(\xi,\xi)|\xi|^2 = 0$, ce qui implique en remontant les égalités précédentes $|\xi|^2 h(\xi) = 0$, puis $|\xi|^2 h = 0$, enfin $h = 0$ donc σ_ξ est injectif (donc bijectif).

Si $n = 4$ alors $h = \xi \otimes \xi - \frac{|\xi|^2}{4} g$, de norme $|h|^2 = \frac{3}{4}|\xi|^2$, est dans le noyau de σ_ξ, ainsi P_g n'est pas elliptique en dimension 4. $\square$

5. Métrique d'Einstein

Une variété d'Einstein, avec $\mathrm{Ric}(g) = \Lambda g$, est dite stable (resp. strictement stable) si l'opérateur $\Delta_E = \Delta_L - 2\Lambda$ est positif (resp. strictement positif), au sens L^2 sur les tenseurs TT. L'étude de cette stabilité sur les variétés compactes sans bords a été étudiée par de nombreux auteurs, en commençant par [10] (voir [2] pour un résultat plus récent ou [11] pour un survey). Il semble qu'il n'y ait aucun exemple d'instabilité si $\Lambda \leq 0$ (ce n'est pas le cas si la variété est non compacte ou si Λ est strictement positif).

Si $\mathrm{Ric}(g) = 2\lambda(n-1)g = \Lambda g$ et $\operatorname{div} h = 0$ on a

$$P_g h = \left[\Delta_L - 4\lambda(n-1) + \lambda n\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right] h,$$

on retrouve bien l'opérateur P_1 de [8]. Notons que g sera stable ssi

$$P_g \geq \lambda n\left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

sur les tenseurs TT. Comme $\Delta_E \circ \mathring{\mathcal{L}} = (\Delta_H - 2\Lambda) \circ \mathring{\mathcal{L}}$, alors en rappelant les formules (2.1), (2.2) et le fait que $d^2 = (d^*)^2 = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_E \mathring{\mathcal{L}} w, \mathring{\mathcal{L}} w\rangle_{L^2} &= \langle \mathring{\mathcal{L}}(\Delta_H - 2\Lambda) w, \mathring{\mathcal{L}} w\rangle_{L^2} \\
&= \langle (\Delta_H - 2\Lambda) w, \operatorname{div} \mathring{\mathcal{L}} w\rangle_{L^2} \\
&= \frac{n-1}{n}|dd^* w|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|d^* d\, w|^2_{L^2} \\
&\quad -2\Lambda|d\, w|^2_{L^2} - \frac{3n-2}{n}\Lambda|d^* w|^2_{L^2} + 2\Lambda^2|w|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi comme de plus Δ_E préserve la décomposition L^2 orthogonale

$$C^\infty(M, \mathring{S}_2) = \operatorname{Im} \mathring{\mathcal{L}} \oplus \ker \operatorname{div}, \tag{5.1}$$

si $\Lambda \leq 0$, la positivité de Δ_E sur $\ker \mathrm{Tr}$ équivaut à celle sur TT$=$ $\ker \mathrm{Tr} \cap \ker \mathrm{div}$. D'autre part

$$\begin{aligned}\langle \mathring{\mathcal{L}} \,\mathrm{div}\, \mathring{\mathcal{L}}w, \mathring{\mathcal{L}}w\rangle_{L^2} &= \langle \mathrm{div}\, \mathring{\mathcal{L}}w, \mathrm{div}\, \mathring{\mathcal{L}}w\rangle_{L^2} \\ &= \frac{(n-1)^2}{n^2}|dd^*w|^2_{L^2} + \frac{1}{4}|d^*d\,w|^2_{L^2} \\ &\quad -\Lambda|d\,w|^2_{L^2} - 2\Lambda\frac{n-1}{n}|d^*w|^2_{L^2} + \Lambda^2|w|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Donc si l'on pose

$$\tilde{P}_g = \Delta_E - \frac{8}{n+2}\mathring{\mathcal{L}}\,\mathrm{div}\, h,$$

qui respecte aussi la décomposition (5.1), on a

$$\begin{aligned}\langle \tilde{P}_g\mathring{\mathcal{L}}w, \mathring{\mathcal{L}}w\rangle_{L^2} &= \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{n^2(n+2)}|dd^*w|^2_{L^2} + \frac{n-2}{2(n+2)}|d^*d\,w|^2_{L^2} \\ &\quad -2\frac{(n-2)}{(n+2)}\Lambda|d\,w|^2_{L^2} - 3\Lambda\frac{(n-2)^2}{n(n+2)}|d^*w|^2_{L^2} \\ &\quad +2\Lambda^2\frac{n-2}{(n+2)}|w|^2_{L^2}\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $n \geq 4$ et $\Lambda \leq 0$, la positivité de $\tilde{P}_g$ sur $\ker \mathrm{Tr}$ équivaut à celle sur TT$=\ker \mathrm{Tr} \cap \ker \mathrm{div}$, or sur TT, on a $\Delta_E = \tilde{P}_g$. Comme en particulier si $\Lambda = 0$, alors $\tilde{P}_g = P_g$, et comme

$$\langle u, P_{g'}u\rangle_{g'}dV_{g'} = \langle u, P_gu\rangle_g dV_g,$$

on déduit :

Proposition 5.1. *Sur une variété compacte sans bord de dimension $n \geq 4$ possédant une métrique Ricci plate g. On a équivalence entre :*
i) g est stable,
ii) $P_{g'} \geq 0$ pour une métrique conforme $g' = e^{2v}g$.
iii)$P_{g'} \geq 0$ pour toute métrique conforme $g' = e^{2v}g$.

6. Formules de Weitzenböck

On donne ici une formule de Weitzenböck afin de réécrire les termes d'ordre deux de P_g. Il est bien connu que ce type de formule est utile lors de l'étude du spectre, et particulièrement de la première valeur propre de P_g.

Pour a, b, c trois réels non tous nul, on définit l'opérateur D des deux tenseurs covariants symétriques dans les 3-tenseurs covariants par

$$(Du)_{kij} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a\nabla_k u_{ij} + b\nabla_i u_{kj} + c\nabla_j u_{ik}),$$

et $\mathring{D}$ son analogue agissant simplement sur les 2-tenseurs symétriques sans trace. Si l'on pose

$$A = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],$$

on trouve

$$D^*Du_{ij} = -\nabla^k\nabla_k u_{ij} - A(\nabla^k\nabla_i u_{jk} + \nabla^k\nabla_j u_{ik}) \,.$$

et

$$\mathring{D}^*\mathring{D}u_{ij} = -\nabla^k\nabla_k u_{ij} - A(\nabla^k\nabla_i u_{jk} + \nabla^k\nabla_j u_{ik}) + \frac{2}{n}A(d^*\operatorname{div} u)g_{ij} \,.$$

Comme d'autre part on a

$$(\operatorname{div}^*\operatorname{div} u)_{ij} = -\frac{1}{2}(\nabla_i\nabla^k u_{jk} + \nabla_j\nabla^k u_{ik}),$$

et

$$(\mathring{\mathcal{L}}\operatorname{div} u)_{ij} = -\frac{1}{2}(\nabla_i\nabla^k u_{jk} + \nabla_j\nabla^k u_{ik}) + \frac{1}{n}(d^*\operatorname{div} u)g_{ij},$$

et que

$$\nabla^k\nabla_i u_{jk} + \nabla^k\nabla_j u_{ik} - (\nabla_i\nabla^k u_{jk} + \nabla_j\nabla^k u_{ik}) = R_{kj}u^k_i + R_{ki}u^k_j - 2R_{qjli}u^{ql}$$

il en découle

$$D^*Du - 2A\operatorname{div}^*\operatorname{div} u = \nabla^*\nabla u - 2A(\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem})u,$$

et

$$\mathring{D}^*\mathring{D}u - 2A\mathring{\mathcal{L}}\operatorname{div} u = \nabla^*\nabla u - 2A(\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem})u.$$

On peut donc réécrire les termes d'ordre deux de P_g en

$$\nabla^*\nabla - \frac{8}{n+2}\mathring{\mathcal{L}}\operatorname{div} = \mathring{D}^*\mathring{D} - \left(2A + \frac{8}{n+2}\right)\mathring{\mathcal{L}}\operatorname{div} + 2A(\operatorname{Ric} - \operatorname{Riem}).$$

On obtient par exemple que pour tout champ de deux tenseurs symétriques sans traces lisses à support compactes

$$\begin{aligned} \langle u, P_g u\rangle_{L^2} &= |Du|^2_{L^2} - \left(2A + \frac{8}{n+2}\right)|\operatorname{div} u|^2_{L^2} + 2A\langle \operatorname{Ric} u, u\rangle_{L^2} \\ &\quad -2(A+1)\langle \operatorname{Riem} u, u\rangle_{L^2} + \frac{n-2}{4(n-1)}\langle Ru, u\rangle_{L^2}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Suivant le contexte (par exemple si on travaille à divergence nulle), un choix judicieux de a, b, c (donc de A), ainsi qu'une étude des termes de courbures, permettra de minimiser la première valeur propre de P_g.

Le cas le plus simple est celui où la courbure sectionnelle est une constante K car alors, avec $A = -\frac{1}{2}$ on trouve

$$P_g = \mathring{D}^*\mathring{D} + \frac{n-6}{n+2}\mathring{\mathcal{L}}\operatorname{div} + \frac{(n-2)(n-4)}{4}K,$$

ainsi P_g est positif dès lors que K l'est et $n \geq 6$.

On pourra aussi par exemple utiliser le lemme suivant dont la preuve, laissée au lecteur, est une adaptation immédiate du lemme 3.3 de [4].

LEMME 6.1. *Considérons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in [0, +\infty)$. Pour un point x de M et $c \in \mathbb{R}$, on note $[c\,\mathrm{Ric}]_{\min}$ la plus petite valeurs propre de $c\,\mathrm{Ric}(g)$ en x, $K_{\max}$ et $K_{\min}$ le max et le min de la courbure sectionnelle en x. On pose*

$$C_x = \max\{[(\alpha+\beta)\,\mathrm{Ric}]_{\min} - (n-2)\beta K_{\max}, [(\alpha-\beta)\,\mathrm{Ric}]_{\min} + n\beta K_{\min}\}.$$

Alors pour tout $h \in \mathring{S}_2$ en x, on a l'inégalité ponctuelle :

$$\langle(\alpha\,\mathrm{Ric} - \beta\,\mathrm{Riem})h, h\rangle_{g_x} \geq C_x \|h\|^2_{g_x}.$$

Références

[1] A. Besse, Einstein manifolds, *Springer-Verlag* (1987).

[2] X. Dai, X. Wang and G. Wei , On the stability of Riemannian manifold with parallel spinors, *Invent. math.* 161, (2005), 151-176 .

[3] E. Delay, Conformally covariant parameterizations for relativistic initial data, Classical and Quantum Gravity, Volume 34, Number 1, 2017

[4] E. Delay, Inversion d'opérateurs de courbures au voisinage d'une métrique Ricci parallèle , *Annales de l'institut Fourier*, Vol. 67, no. 2 (2017), p. 521-538.

[5] E. Delay, Conformally covariant differential operators on symmetric 2-tensors, en préparation.

[6] E. Aubry and C. Guillarmou, Conformal harmonic forms, Branson-Gover operators and Dirichlet problem at infinity *Journal of the European Mathematical Society* 13(4) (2011), 911-957

[7] J. Erdmenger and H. Osborn, Conformally covariant differential operators : symmetric tensor fields *Class. Quantum Grav.* , Volume 15, Number 2 (1998) 273.

[8] Y. Matsumoto, A GJMS construction for 2-tensors and the second variation of the total Q-curvature, *Pacific J. Math.* 262 (2013) 437.

[9] T. Branson and A. R. Gover, Conformally invariant operators, differential forms, cohomology and a generalisation of Q-curvature, *Comm. Partial Differential Equations* 30 (2005), no. 10-12, 1611-1669.

[10] N. Koiso, Non-deformability of Einstein metrics, *Osaka J. Math.* **15** (1978), 419-433.

[11] K. Kröncke, Variational Stability and Rigidity of Compact Einstein Manifolds, *Quantum Math. Phys.* (2016) pp 497-513.

[12] A. Lichnerowicz, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, *Publications Mathématiques de l'IHES*, Tome 10 (1961), pp. 5-56.

AVIGNON UNIVERSITÉ – LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D'AVIGNON – F-84 916 AVIGNON

Email address: erwann.delay@univ-avignon.fr